ΤΟΜΟΣ III

ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΝΩΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

ΤΟΜΟΣ III

ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΝΟΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

- Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση
- Μαθηματική Επαγωγή
- Αριθμοθεωρία - Πιθανοθεωρία
- Εξισώσεις και Συστήματα
- Μόνιμες Ανισότητες - Ανισώσεις
- Ευκλείδεια Γεωμετρία του Επιπέδου
- Ευκλείδεια Γεωμετρία Τρισδιάστατου Χώρου
- Αθροίσματα - Ακολουθίες - Όρια
- Διανύσματα - Αναλυτική Γεωμετρία
- Ολοκληρώματα Αόριστα - Ορισμένα
- Ολοκληρώματα Γενικευμένα
- Τριγωνομετρία - Μιγαδικοί Αριθμοί
- Συναρτήσεις - Πολυώνυμα - Παράγωγος
- Συναρτησιακές Σχέσεις και Εξισώσεις

ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

«ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αθροίσματα

Προβλήματα: 33i, 47i, 47ii, 47iii, 69, 79ii, 116i, 116ii, 116iii, 116iv, 120i.

Ακολουθίες

Προβλήματα: 35ii, 35iii, 35iv, 39i, 50i, 81ii, 86, 94ii, 109i, 133ii.

Αναλυτική Γεωμετρία

Προβλήματα: 24, 51ii, 54i, 54ii, 55ii.

Ανισότητες (Μόνιμες)

Προβλήματα: 1i, 1ii, 2, 16i, 20i, 20ii, 27i, 35i, 37i, 37ii, 41i, 51i, 51ii, 51iii, 53i, 53ii, 53iii, 59i, 59ii, 59iii, 59iv, 62iii, 63i, 63ii, 63iii, 63iv, 63v, 64i, 65i, 65ii, 67i, 68i, 74i, 74ii, 75i, 75ii, 81i, 82i, 82ii, 83i, 83ii, 84, 87i, 87ii, 90i, 90ii, 90iii, 91, 97, 99i, 99ii, 99iii, 103i, 103ii, 103iii, 103iv, 106i, 108i, 110i, 110ii, 110iii, 113i, 113ii, 113iii, 113iv, 114i, 114ii, 114iii, 114iv, 115i, 115ii, 115iii, 115iv, 116i, 116ii, 116iii, 116iv, 119i, 119ii, 120i, 120ii, 120iii, 120iv, 121i, 121ii, 121iii, 122i, 122ii, 139i, 139ii, 139iv, 142i, 142ii, 142iii, 142iv, 143iii, 145v, 145vi.

Ανισώσεις

Προβλήματα: 98ii, 145iv.

Αριθμοθεωρία (Στοιχειώδης)

Προβλήματα: 22, 76a, 76b, 77, 88i, 88ii, 95, 106ii, 106iii, 133i, 139iii, 139vi, 139vii, 144i, 144ii, 144iii, 144iv, 144v, 144vi.

Γεωμετρία του Επιπέδου (Ευκλείδεια)

Προβλήματα: 4i, 4ii, 6, 8, 10i, 10ii, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26i, 26ii, 28, 29, 31, 32, 34, 36, 40i, 40ii, 40iii, 43, 48i, 48ii, 48iii, 52, 53iii, 56, 58i, 58ii, 58iii, 60i, 60ii, 62ii, 66i, 66ii, 71, 76c, 80i, 80ii, 80iii, 81ii, 83ii, 92i, 92ii, 92iii, 97, 101i, 101ii, 105, 112i, 112ii, 112iii, 118i, 118ii, 118iv, 123i, 123ii, 124i, 124ii, 124iii, 124iv, 128i, 128ii, 128iii, 128iv, 131i, 131ii, 136i, 136ii, 139v, 140i, 140ii, 143i, 143ii, 143iii, 145vi, 145vii, 145viii, 149.

Γεωμετρία του Τρισδιάστατου Χώρου (Ευκλείδεια)

Προβλήματα: 85, 118iii, 147i, 147ii.

Διανύσματα

Προβλήματα: 15, 40i, 40ii, 40iii, 92iii, 112iii-b, 105.

Εξισώσεις Εκθετικές και Λογαριθμικές

Προβλήματα: 3i, 70, 100iii, 145i.

Εξισώσεις στους Φυσικούς, Ακεραίους και Ρητούς αριθμούς

Προβλήματα: 5, 18i, 18ii, 25i, 25ii, 25iii, 27ii, 88iii, 100ii.

Εξισώσεις στους Πραγματικούς και Μιγαδικούς αριθμούς

Προβλήματα: 3ii, 9, 13, 16ii, 27iii, 27iv, 27v, 27vi, 33i, 39ii, 44, 45, 46, 55i, 57i, 57ii, 62i, 64ii, 70, 98i, 100i, 100iii, 104i, 104ii, 120iv, 127v, 129, 141, 145ii, 146iii.

Μαθηματική Επαγωγή

Προβλήματα: 94ii, 111iii, 139iv,

Μιγαδικοί Αριθμοί

Προβλήματα: 46, 122iii.

Ολοκληρώματα Αόριστα

Προβλήματα: 11v, 23i, 23ii, 23iv, 30i, 30ii, 30iii, 42i, 42ii, 42iii, 42iv, 42v, 49, 73i, 73ii, 73iii, 73iv, 73v, 73vi, 73vii, 73viii, 89i, 89ii, 89iii, 138i, 138ii, 138iii, 138iv, 138v, 138vi, 138vii, 138viii, 138ix, 138x, 138xi, 138xii, 138xiii, 138xiv, 138xv, 138xvi, 138xvii,

Ολοκληρώματα Γενικευμένα

Προβλήματα: 1iv,78i, 78ii, 78iii, 130i, 130ii, 130iii.

Ολοκληρώματα Ορισμένα

Προβλήματα: 1ii, 11i, 11ii, 11iii, 11iv, 23iii, 55iii, 61iii, 69, 75i, 79ii, 113i, 137i, 137xii, 137xv, 137xvii, 146ii, 147ii.

Όρια

Προβλήματα: 1iii, 50ii, 50iii, 94i, 96, 109i, 109ii, 109iii, 109iv, 109v, 109vi, 109vii, 137i, 137ii, 137iii, 137iv, 137v, 137vi, 137vii, 137viii, 137ix, 137x, 137xi, 137xii, 137xiii, 137xiv, 137xv, 137xvi, 137xvii.

Παραγοντοποίηση

Προβλήματα: 107i, 107ii, 107iii, 107iv, 107v, 129, 134i, 134ii, 134iii, 134iv, 134v, 134vi, 134vii, 134viii, 134ix, 134x, 134xi, 134xii, 134xiii, 134xiv, 145iii.

Παράγωγος

Προβλήματα: 61i, 61ii.

Πιθανοθεωρία - Συνδυαστική

Προβλήματα: 38i, 38ii, 54ii, 148i, 148ii, 148iii, 148iv, 148v, 148vi, 148vii, 76d.

Πολυώνυμα

Προβλήματα: 93i, 107ii, 107iv, 107v, 125i, 125ii, 126i, 126ii, 126iii, 146iii.

Συναρτήσεις

Προβλήματα: 1iii, 7, 28, 33ii, 79i.

Συναρτησιακές Σχέσεις - Εξισώσεις

Προβλήματα: 93ii, 102i, 102ii, 102iii, 102iv, 102i, 102v, 102vi, 108ii, 108iii, 108iv, 111i, 111ii, 111iii, 146i, 146ii.

Συστήματα

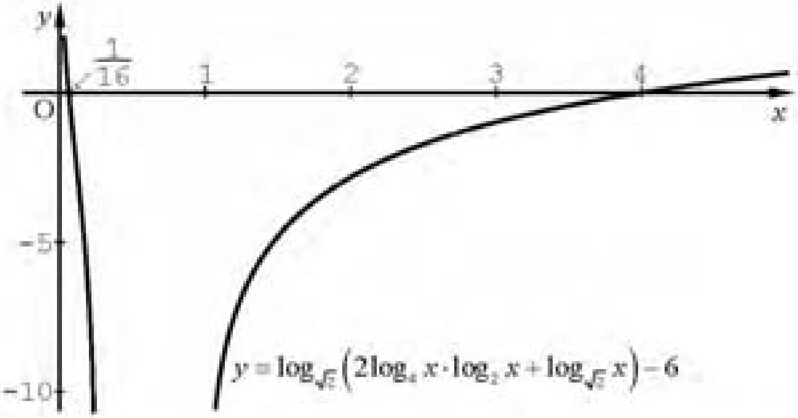
Προβλήματα: 25iii, 41ii, 127i, 127ii, 127iii, 127iv.

Ταυτότητες

Προβλήματα: 33iii, 68ii, 100iii, 117i, 117ii, 129, 132i, 132ii, 132iii, 132iv, 145ix, 146ii.

Τριγωνομετρία

Προβλήματα: 39ii, 44, 46, 53ii, 67i, 67ii, 67iii, 67iv, 83i, 149.



Απόδειξη. **ii)** Αν $x = x_0$ μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης **[a]**, τότε ισχύει ότι:

$$(x_0+1)^n + (x_0-1)^n = 1.$$

Επειδή ο n είναι άρτιος ισχύει: $\left\{ |x_0+1|^n \le 1 \ \wedge\ |x_0-1|^n \le 1 \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{-1 \le x_0+1 \le 1 \ \wedge\ -1 \le x_0 - 1 \le 1\} \Leftrightarrow \{-2 \le x_0 \le 0 \ \wedge\ 0 \le x_0 \le 2\}$.

Άρα $x_0 = 0$, πράγμα άτοπο, διότι η $x_0 = 0$ δεν είναι λύση της **[a]**.

Έστω $x = x_0$ μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης **[b]**. Τότε θα είναι

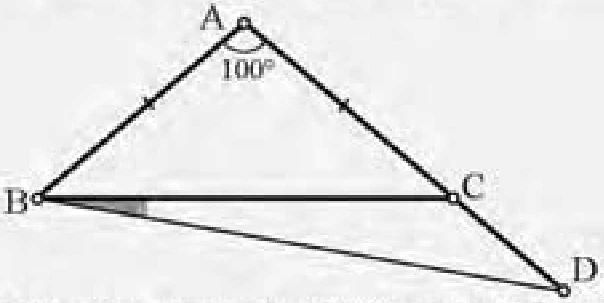
$(x_0+1)^m + (x_0-1)^m = \dfrac{1}{2m}$, και επειδή ο m είναι άρτιος ισχύει:

$\left\{ |x_0+1|^m \le \dfrac{1}{2^m} \ \wedge\ |x_0-1|^m \le \dfrac{1}{2^m} \right\} \Leftrightarrow \left\{ |x_0+1| \le \dfrac{1}{2} \ \wedge\ |x_0-1| \le \dfrac{1}{2} \right\} \Leftrightarrow$

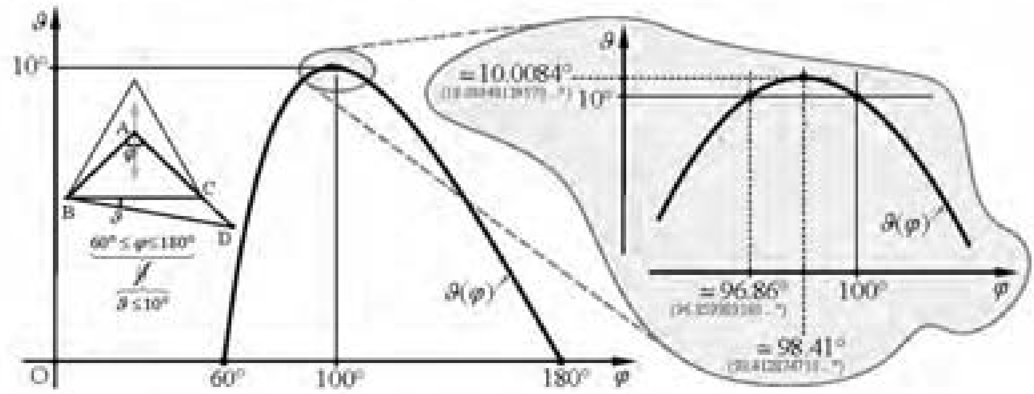
$\Leftrightarrow \left\{ -\frac{1}{2} \le x_0 + 1 \le \frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2} \le x_0 - 1 \le \frac{1}{2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ -\frac{3}{2} \le x_0 \le -\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} \le x_0 \le \frac{3}{2} \right\}$,

πράγμα που είναι άτοπο, διότι οι σχέσεις δεν συναληθεύουν.

Πρόβλημα 4. **i)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με $AB = AC$ και $\measuredangle BAC = 100°$. Στην προέκταση, της πλευράς AC, προς το C, θεωρούμε σημείο D τέτοιο, ώστε $AD = BC$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\measuredangle CBD$.



ii) Να αποδείξετε ότι, αν η γωνία $\measuredangle BAC$ του πρώτου ερωτήματος είναι $\measuredangle BAC \ge 60°$, τότε η $\measuredangle CBD < 11°$.



$$\boxed{\vartheta(\varphi) = \operatorname{Arctan}\left(\cot\tfrac{\varphi}{2}\cdot\frac{-1+2\sin(\varphi/2)}{1+2\sin(\varphi/2)}\right),\quad 60^\circ \le \varphi \le 180^\circ}$$

Πρόβλημα 5. Να βρεθούν οι αριθμοί $a, b \in \mathbb{Z}$, που επαληθεύουν την εξίσωση:

$$(2-a)(2-b) = 1 + (a - |a|)(b - |b|). \tag{E}$$

Λύση. Επειδή ισχύει ότι: $x - |x| = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \ge 0 \\ 2x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1)

η δεδομένη εξίσωση, ανάγεται στις εξισώσεις που προκύπτουν, από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

a) Αν $\left\{\begin{matrix} a\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \\ \vee \\ b\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\end{matrix}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} a-|a|=0 \\ \vee \\ b-|b|=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-|a|)(b-|b|)=0,$

και διαδοχικά από τη δεδομένη εξίσωση συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\Rightarrow \{\,(2-a)(2-b)=1 \wedge (a\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \vee b\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\,\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{(2-a=2-b=1 \vee 2-a=2-b=-1) \wedge (a\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \vee b\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\,(a=1 \wedge b=1) \vee (a=3 \wedge b=3)\,\}. \qquad (2)\end{aligned}$$

b) Αν $\left\{\begin{matrix} a\in\mathbb{Z}_{<0} \\ \wedge \\ b\in\mathbb{Z}_{<0}\end{matrix}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} a-|a|=2a \\ \wedge \\ b-|b|=2b\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-|a|)(b-|b|)=4ab,$

και διαδοχικά από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\Rightarrow \{\,(2-a)(2-b)=1+4ab \wedge a,b\in\mathbb{Z}_{<0}\,\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\,4-2b-2a+ab=1+4ab \wedge a,b\in\mathbb{Z}_{<0}\,\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\,3ab+2a+2b=3 \wedge a,b\in\mathbb{Z}_{<0}\,\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\,9ab+6a+6b=9 \wedge a,b\in\mathbb{Z}_{<0}\,\} \Rightarrow\end{aligned}$$

Για $\underline{m \geq 3}$, έχομε: $J_m = \int_0^1 \frac{4x^3-6x^2+8x-3}{(x^2-x+1)^m}dx \overset{(\tau)}{=} \int_0^1 \frac{2(2x-1)\,dx}{(x^2-x+1)^{m-1}} +$

$+\int_0^1 \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-x+1)^m} = 2\int_0^1 \frac{d(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^{m-1}} + \int_0^1 \frac{d(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^m} =$

$= \frac{2(x^2-x+1)^{-m+2}}{-m+2}\Big|_0^1 + \frac{(x^2-x+1)^{-m+1}}{-m+1}\Big|_0^1 = \frac{-2}{(m-2)(x^2-x+1)^{m-2}} +$

$+\frac{-1}{(m-1)(x^2-x+1)^{m-1}} = 0$, επομένως το $J_m = 0$, για κάθε $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Λύση. **v)** Έχομε $J = \int \ln(\ln x)\frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} e^t \equiv \ln x \Rightarrow t = \ln(\ln x) \\ \frac{dx}{x} = e^t\,dt \end{array} \right| = \int t\,e^t dt =$

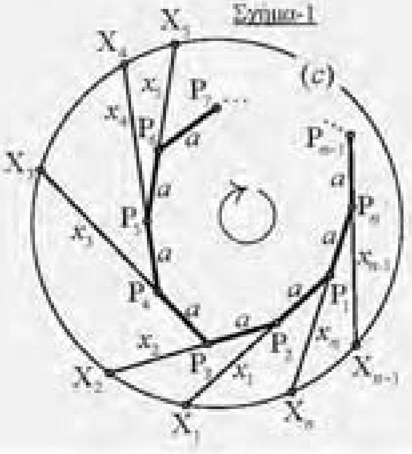
$= \int t\,de^t = t\,e^t - \int e^t\,dt = e^t(t-1) + c \Rightarrow J = \ln x \cdot \big(\ln(\ln x) - 1\big) + c$.

Πρόβλημα 12. Εντός κύκλου (c), δίνεται κλειστό πολύγωνο $P_1P_2P_3\ldots P_{n-1}P_n$ για το οποίον ισχύει ότι $P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{n-1}P_n = P_nP_1 = a$.

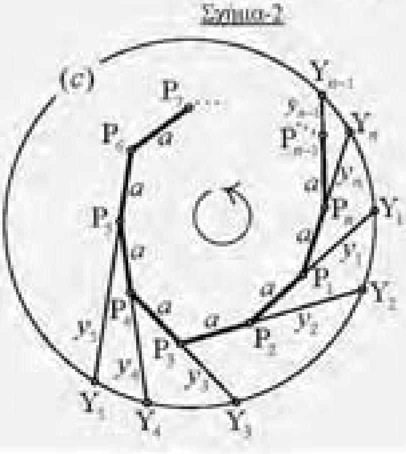
Έστω ότι οι προεκτάσεις των πλευρών $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ προς τα σημεία $P_2, P_3, \ldots, P_n, P_1$ αντίστοιχα περιέχουν με τον (c) τα σημεία $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$ και $x_1 = P_2X_1$, $x_2 = P_3X_2$, …, $x_{n-1} = P_nX_{n-1}$, $x_n = P_1X_n$ (βλέπε το σχήμα-1).

Έστω ότι οι προεκτάσεις των πλευρών $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ προς τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ αντίστοιχα περιέχουν με τον (c) τα σημεία $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n$ και $y_1 = P_1Y_1$, $y_2 = P_2Y_2$, …, $y_{n-1} = P_{n-1}Y_{n-1}$, $y_n = P_nY_n$ (βλέπε το σχήμα-2). Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Σχήμα-1

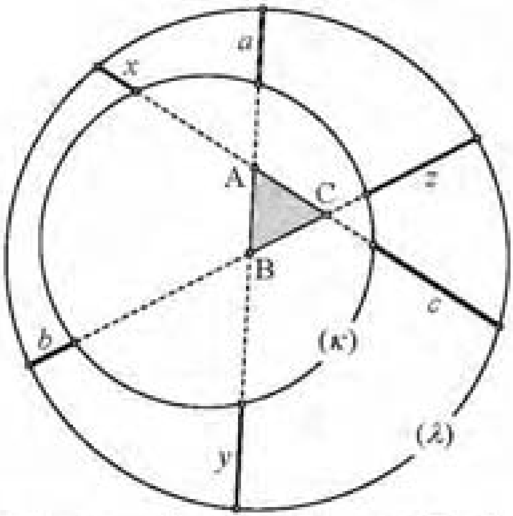


Σχήμα-2



Εφαρμογή. Αν το ισόπλευρο $\triangle ABC$ βρίσκεται εντός του κύκλου (κ) ο οποίος βρίσκεται εντός άλλου κύκλου (λ), και οι πλευρές του στο χωρίο μεταξύ των δύο κύκλων (βλέπε σχήμα), ορίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα a, x, b, y, c, z, τότε ισχύει η ισότητα:

$$x+y+z=a+b+c.$$



Ιστορικά. Τα παραπάνω θεωρήματα εμπεριέχονται στο τεύχος των μαθητικών σημειώσεων, με τον τίτλο «Αντιστροφοαντίθετο» του Μιχάλη Μεταξά, στο Λύκειο «Ο ΚΟΡΑΗΣ» το 1977, με διευθυντή τον Μενέλαο Παρλαμά και καθηγητή Μαθηματικών τον Μ. Γ. Μαραγκάκη.

Πρόβλημα 13. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y που ανήκουν στο $\mathbb{R}$ και πληρούν την εξίσωση: $(x-1)^2(y^2+4y+7)+(y+1)^2(x^2+x+5)=0$.

Λύση. Τα τριώνυμα $\left\{\begin{matrix} A(x)=x^2+x+5 \\ B(y)=y^2+4y+7 \end{matrix}\right\}$ έχουν μιγαδικές λύσεις δεδομένου ότι $\left\{\begin{matrix} \Delta_B=4^2-4\cdot1\cdot7=-12<0 \\ \Delta_A=1^2-4\cdot5=-19<0 \end{matrix}\right\}$, και επειδή τα τριώνυμα θα έχουν το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τους (*βλέπε «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος ΙΙ, σελ.739*), συνάγεται ότι ισχύει:

$$\{\, y^2+4y+7>0 \ \wedge\ x^2+x+5>0 \,\} \text{ για κάθε } x, y\in\mathbb{R}.$$

(Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να καταλήξομε με βάση το *σχόλιο-1* (βλέπε παρακάτω), επειδή είναι $y^2+4y+7|_{y=0}=7>0$ και $x^2+x+5|_{x=0}=5>0$).

Επειδή $(x-1)^2\geq0 \wedge (y+1)^2\geq0$, για να ικανοποιείται η δεδομένη εξίσωση θα πρέπει οι μη αρνητικές ποσότητες, να είναι και οι δύο μηδέν. Δηλαδή, $\{(x-1)^2=0 \wedge (y+1)^2=0\} \Leftrightarrow \{x=1 \wedge y=-1\}$.

Πρόβλημα 27. **i)** Να αποδειχθεί ότι $(1+x)(1+y)(1+z)\geq\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}_{>0}$.

ii) Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}^2$ η εξίσωση $x^2+4y-4y^2-16=0$.

iii) Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}^3$ η $3x^2+y^2+2z^2-2xy-2x-2z+1=0$.

iv) Να επιλυθεί ως προς x στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση:

$$\frac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c}=\frac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}.$$

v) Να επιλυθεί ως προς x στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση:

$$ax^2+(b+c)x-(a+b+c)=0,\ \text{όπου}\ a\in\mathbb{R}_{\neq 0}.$$

vi) Αν είναι m πραγματική παράμετρος, να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^3-(m+1)x^2-(m-1)x+m^2-1=0$.

Λύση. **i)** Ισχύει $(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz\geq$

$$\overset{Cauchy}{\geq}1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{xyyzzx}+xyz=1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz=$$

$$=1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{xyz}\cdot\sqrt[3]{xyz}+\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^3=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3.$$

Λύση. **ii)** Ισχύει ότι $x^2+4y-4y^2-16=0\Leftrightarrow x^2-(4y^2-4y+1)=15\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-(2y-1)^2=15\Leftrightarrow(x+2y-1)\cdot(x-2y+1)=15$, και επειδή $15=(q)\cdot(15q)=(15q)\cdot(q)=(3q)\cdot(5q)=(5q)\cdot(3q)$ όπου $q\in\{-1,1\}$, προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x+2y-1=q & x+2y-1=15q & x+2y-1=3q & x+2y-1=5q\\ x-2y+1=15q & x-2y+1=q & x-2y+1=5q & x-2y+1=3q\\\hline\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x=8q & x=8q & x=4q & x=4q\\ y=\dfrac{1-7q}{2} & y=\dfrac{1+7q}{2} & y=\dfrac{1-q}{2} & y=\dfrac{1+q}{2}\\\hline\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\overset{q=\pm1}{\Leftrightarrow}\begin{array}{r|cc|cc|cc|cc|}\hline & q=1 & q=-1 & q=1 & q=-1 & q=1 & q=-1 & q=1 & q=-1\\ x= & 8 & -8 & 8 & -8 & 4 & -4 & 4 & -4\\ y= & -3 & 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0\\\hline\end{array}.$$

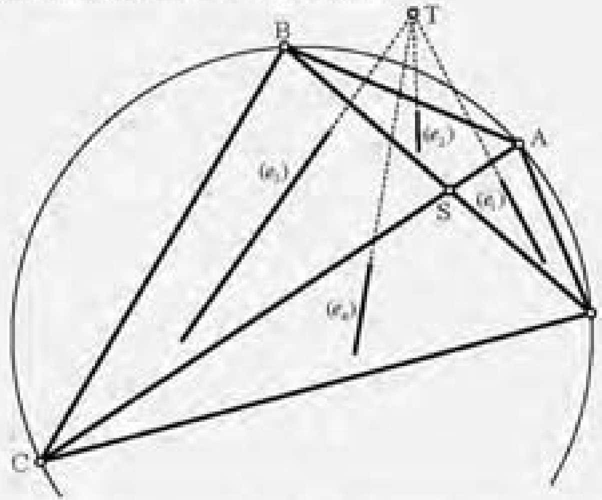
Επομένως, οι λύσεις της δεδομένης εξίσωσης στο $\mathbb{Z}^2$, είναι οι:

$$(x,y)\in\{(8,-3),(-8,4),(8,4),(-8,-3),(4,0),(-4,1),(4,1),(-4,0)\}.$$

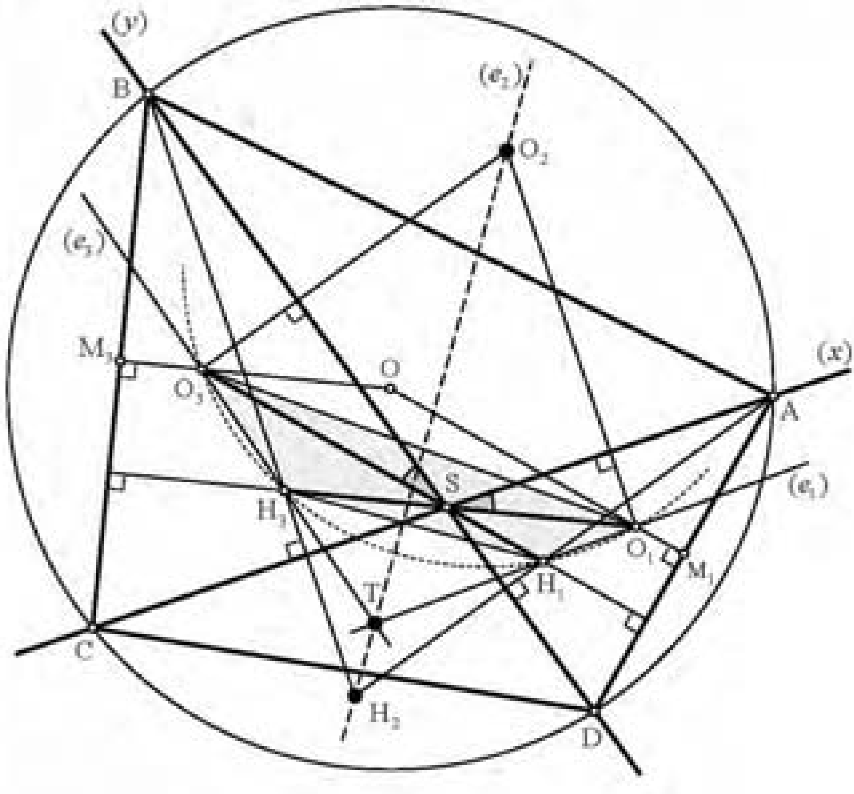
Λύση. **iii)** Διαδοχικά έχομε ότι: $3x^2+y^2+2z^2-2xy-2x-2z+1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x^2+z^2+1\underline{+2xz}-2x-2z)+(x^2-2xy+y^2)+(x^2\underline{-2xz}+z^2)=0\Leftrightarrow$$

Πρόβλημα 32. Δίνεται τετράπλευρο ABCD εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν S είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες του ***Euler*** $(e_1), (e_2), (e_3), (e_4)$ των τριγώνων $\triangle SDA$, $\triangle SAB$, $\triangle SBC$, $\triangle SCD$ αντίστοιχα, περιέχουν ένα κοινό σημείο T.



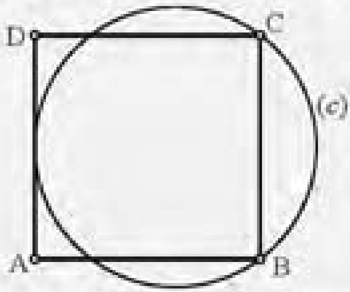
Απόδειξη. Θεωρούμε τα ορθόκεντρα H_1, H_3 και τα περίκεντρα O_1, O_3 των τριγώνων $\triangle SDA$, $\triangle SBC$ αντίστοιχα.



iii) Σε τετράγωνο $ABCD$ κατασκευάζομε κύκλο (c) που περιέχει τα σημεία B, C και εφάπτεται της πλευράς AD. Σας ερωτούν:

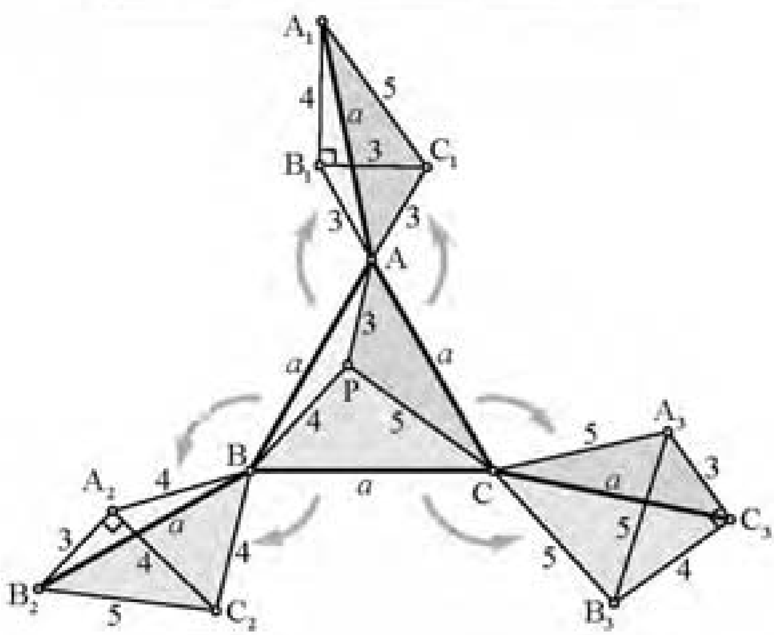
a) Το $ABCD$ ή ο κύκλος (c), έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο;

b) Το $ABCD$ ή ο κύκλος (c), έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



Απόδειξη. **i)** Σχεδιάζομε τις στροφές των τριών τριγώνων, που δημιουργεί το σημείο P, στο εσωτερικό του τριγώνου ABC.

Στροφή του:	με κέντρο:	λαμβάνομε το:
↺ $\triangle PAB$	A	$\triangle AB_1A_1$
↻ $\triangle PCA$	A	$\triangle AC_1A_1$
↺ $\triangle PBA$	B	$\triangle BA_2B_2$
↻ $\triangle PBC$	B	$\triangle BC_2B_2$
↺ $\triangle PCA$	C	$\triangle CA_3C_3$
↻ $\triangle PCB$	C	$\triangle CB_3C_3$



Τα τρίγωνα $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BC_2A_2$ και $\triangle CA_3B_3$ είναι ισόπλευρα και έχουν πλευρές 3, 4, 5 αντίστοιχα. Επιπλέον, τα τρίγωνα $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ είναι ορθογώνια ($3^2+4^2=5^2$) και ίσα μεταξύ τους, με πλευρές 3,4,5. Συνεπώς για τα εμβαδά τους ισχύουν:

$$\left\{\begin{array}{c}(AB_1C_1)=\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4},\ (BC_2A_2)=\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4},\ (CA_3B_3)=\dfrac{5^2\sqrt{3}}{4}\\ (A_1B_1C_1)=(A_2B_2C_2)=(A_3B_3C_3)=\dfrac{1}{2}3\cdot4=6\end{array}\right\}. \quad (1)$$

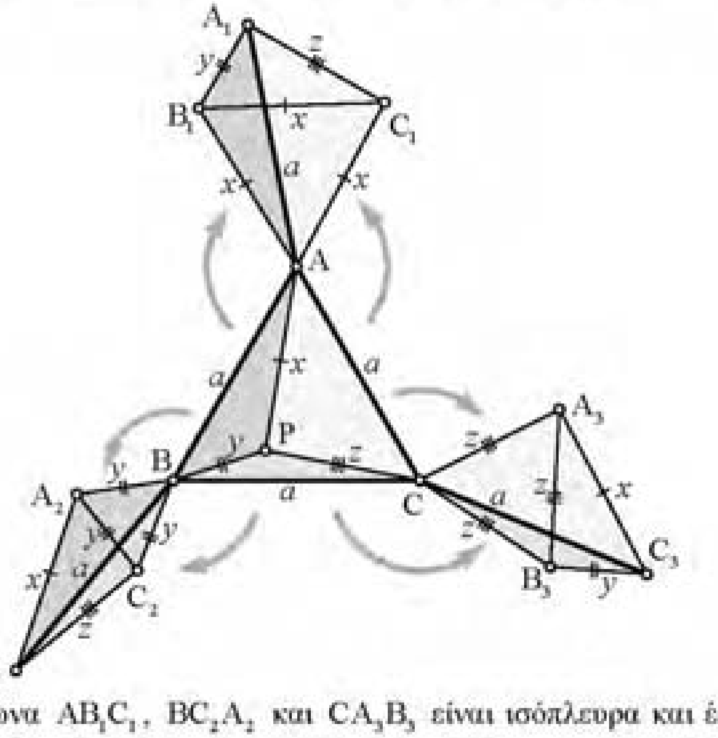
Επίσης $(AC_1A_1B_1)+(BA_2B_2C_2)+(CB_3C_3A_3)=2(ABC)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\big((AB_1C_1)+(A_1B_1C_1)\big)+\big((BC_2A_2)+(A_2B_2C_2)\big)+$$
$$+\big((CA_3B_3)+(A_3B_3C_3)\big)=2(ABC)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(AB_1C_1)+(BC_2A_2)+(CA_3B_3)+3(A_1B_1C_1)=2(ABC)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{(3^2+4^2+5^2)\sqrt{3}}{4}+3\cdot6=2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\overset{a\in\mathbb{R}_+}{\Rightarrow}a=\sqrt{25+12\sqrt{3}}\simeq6.7664.$$

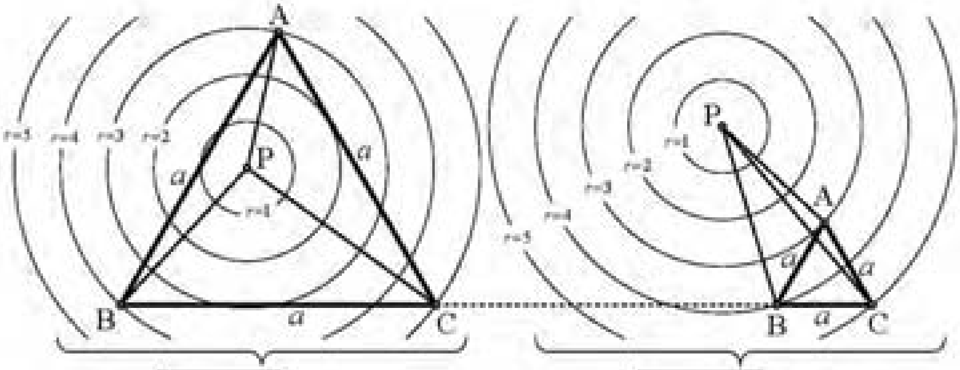
Λύση. **ii)** Χρησιμοποιούμε αυτή ταύτη τη μέθοδο, με τις στροφές των τριγώνων όπως και στο (**i**), και προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Τα τρίγωνα AB_1C_1, BC_2A_2 και CA_3B_3 είναι ισόπλευρα και έχουν πλευρές x, y, z αντίστοιχα.

Αν τεθεί στη σχέση αυτή, $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ έπεται ότι $a = \sqrt{25 \pm 12\sqrt{3}} \simeq \begin{cases} \simeq 6.7664 \\ \simeq 2.0531 \end{cases}$.

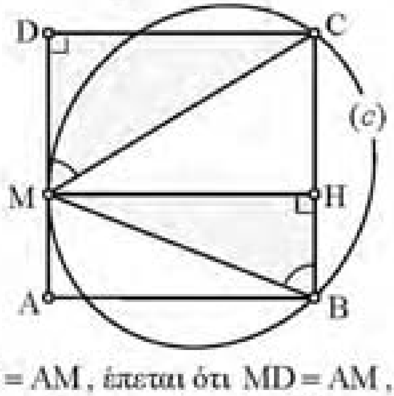
Οι δύο αυτές περιπτώσεις οπτικοποιούνται στα παρακάτω σχήματα:



$a = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} \simeq 6.7664$ $\qquad$ $a = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \simeq 2.0531$

Απάντηση. **iii)** Έστω M το σημείο επαφής του κύκλου (c) με το τετράγωνο. Φέρομε την $MH \perp BC$, και επειδή η DA εφάπτεται του (c), ισχύει ότι $\measuredangle DMC = \measuredangle MBC$ (υπό χορδής και εφαπτομένης), και συνεπώς:

$$\left.\begin{array}{c} \measuredangle DMC = \measuredangle HBM \\ \measuredangle MDC = \measuredangle BHM = 90^o \\ CD = MH \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MDC = \triangle BHM \Rightarrow MD = BH.$$

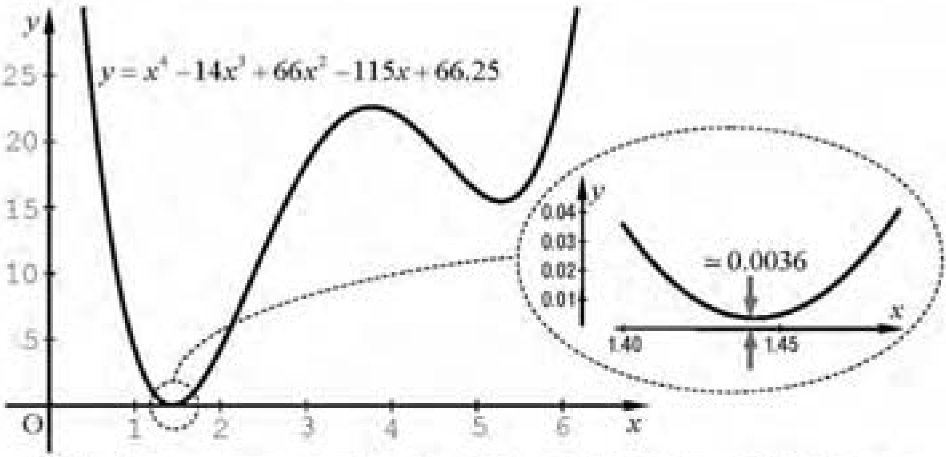


Επειδή όμως $BH = AM$, έπεται ότι $MD = AM$, και άρα το σημείο επαφής M, είναι το μέσο της πλευράς DA και το σημείο H το μέσο της πλευράς BC.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε την πλευρά του τετραγώνου ABCD με μήκος δύο (βλέπε το παρακάτω σχήμα), οπότε θα έχομε:

$$MC = MB = \sqrt{MH^2 + HC^2} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

Υποθέτομε ότι O είναι το κέντρο του κύκλου (c), με ακτίνα $OM = R$, και το N είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος MB.



Εξαιτίας της (τ) ισχύει ότι $x^4-14x^3+66x^2-115x+66.25>0$, και συνεπώς έχει μόνο μιγαδικές ρίζες. Ισοδύναμα έχομε:

$$x^4-14x^3+66x^2-115x+66.25=(x^2-7x+8)^2-i^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=$$

$$=\left(x^2-7x+8+i\,x-i\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x^2-7x+8-i\,x+i\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(x^2-(7-i)x+\left(8-i\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left(x^2-(7+i)x+\left(8+i\frac{3}{2}\right)\right)=0.$$

Τελικά, αληθεύει ότι η $x^4-14x^3+66x^2-115x+66.25=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{x^2-(7-i)x+\left(8-i\frac{3}{2}\right)=0\ \vee\ x^2-(7+i)x+\left(8+i\frac{3}{2}\right)=0\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left((7-i)\pm\sqrt{(7-i)^2-4\left(8-i\frac{3}{2}\right)}\right)=\dfrac{(7-i)\pm\sqrt{16-8i}}{2}\\ x=\frac{1}{2}\left((7+i)\pm\sqrt{(7+i)^2-4\left(8+i\frac{3}{2}\right)}\right)=\dfrac{(7+i)\pm\sqrt{16+8i}}{2}\end{array}\right\},$$

δηλαδή, ισχύει: $\left\{\begin{array}{ll} x_1=\left(\frac{7}{2}-\frac{i}{2}\right)+\sqrt{4-2i} & x_2=\left(\frac{7}{2}-\frac{i}{2}\right)-\sqrt{4-2i}\\ x_3=\left(\frac{7}{2}+\frac{i}{2}\right)+\sqrt{4+2i} & x_4=\left(\frac{7}{2}+\frac{i}{2}\right)-\sqrt{4+2i}\end{array}\right\}.$

Λύση. **ii)** Ισοδύναμα είναι (Ε) $\Leftrightarrow x^2+5+\sqrt{x^2+5}=x^4-x^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x^2+5)+2\cdot\sqrt{x^2+5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=x^4-2\cdot x^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+5}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+5}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+5}+\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+5}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+1-x^2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$=\int_{1/e}^{1}\ln\tfrac{1}{x}\,dx=\Big[x\ln\tfrac{1}{x}\Big]_{1/e}^{1}-\int_{1/e}^{1}x\,d(\ln\tfrac{1}{x})=-\frac{1}{e}-\int_{1/e}^{1}x\,(\ln\tfrac{1}{x})'\,dx=$$

$$=-\frac{1}{e}-\int_{1/e}^{1}x\cdot(-\tfrac{1}{x})\,dx=-\frac{1}{e}+\int_{1/e}^{1}dx=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}=1-\frac{2}{e}.$$

Απόδειξη. **ii)** Θέτομε $-a+b+c=\ell$, $a-b+c=m$, $a+b-c=n$, οπότε ισχύει ότι $\ell+m+n=a+b+c$ και η δεδομένη σχέση μεταλλάσσεται στην:

$$|\ell|+|m|+|n|=|\ell+m+n|.$$

Επομένως οι ℓ, m, n είναι ομόσημοι, αν είναι διάφοροι του μηδενός, και συνεπώς θα έχομε:

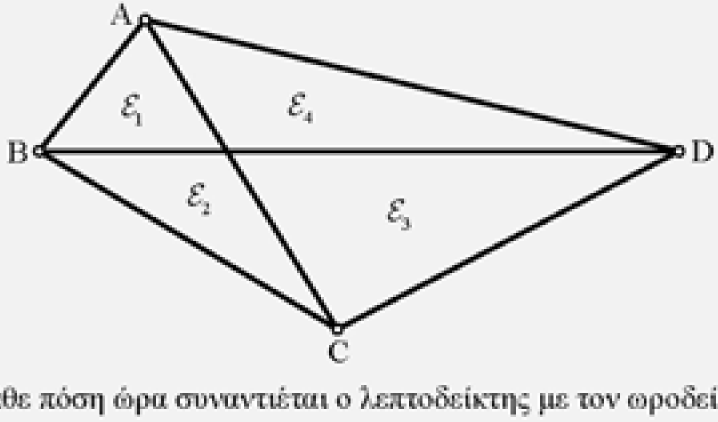
$$\begin{Bmatrix}\ell m\geq 0\\ mn\geq 0\\ n\ell\geq 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}(-a+b+c)(a-b+c)\geq 0\\ (a-b+c)(a+b-c)\geq 0\\ (a+b-c)(-a+b+c)\geq 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}c^2-(a-b)^2\geq 0\\ a^2-(b-c)^2\geq 0\\ b^2-(c-a)^2\geq 0\end{Bmatrix}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca).$$

Πρόβλημα 76. Σας ερωτούν:

a) Υπάρχει κυρτό τετράπλευρο ABCD, που οι διαγώνιοί του AC, BD, να το διαμερίζουν σε 4 τρίγωνα, των οποίων τα εμβαδά $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ να είναι τέσσερις διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί;



b) Κάθε πόση ώρα συναντιέται ο λεπτοδείκτης με τον ωροδείκτη του ωρολογίου;

c) Υπάρχει τρίγωνο που να έχει εμβαδόν ίσον με 12cm^2 και περίμετρο ίση με 12cm;

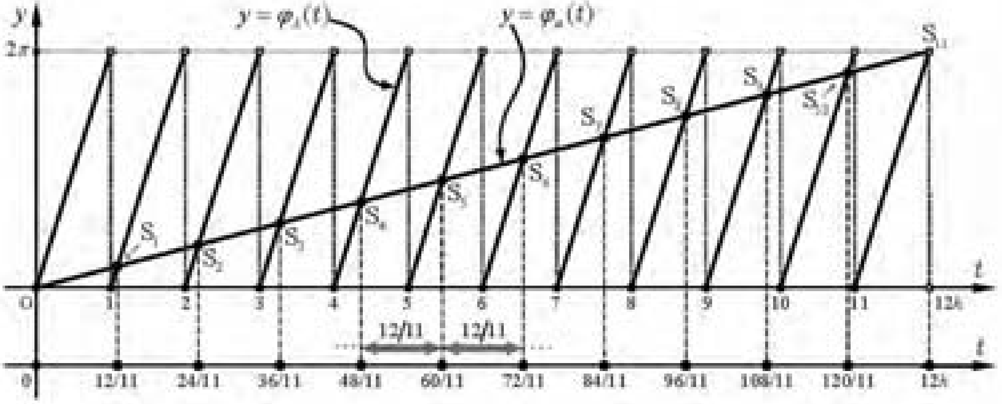
d) Αν δεν υπάρχουν τρείς διαγώνιες ενός κυρτού δεκαγώνου που να τέμνονται στο ίδιο σημείο μέσα στο δεκάγωνο, σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται οι διαγώνιες από τις τομές τους;

Έχομε $\dfrac{d\varphi_\omega}{dt}=c_1 \Rightarrow \varphi_\omega(t)=c_1 t+c_2$ και $\left\{\begin{matrix}\varphi_\omega(0)=0 \;\;\Rightarrow c_2=0\\ \varphi_\omega(12)=2\pi \Rightarrow c_1=\pi/6\end{matrix}\right\}$.

Και επομένως για τον ωροδείκτη παίρνομε: $\varphi_\omega(t)=\dfrac{\pi}{6}t$, $\forall t\in \mathbb{R}_{[0,12)}$. (1)

Επίσης $\dfrac{d\varphi_\lambda}{dt}=c_3 \Rightarrow \varphi_\lambda(t)=c_3 t+c_4$ και $\left\{\begin{matrix}\varphi_\lambda(0)=0 \;\;\Rightarrow c_4=0\\ \varphi_\lambda(1)=2\pi \Rightarrow c_3=2\pi\end{matrix}\right\}$,

άρα λόγω της ωριαίας περιοδικότητας της κίνησης του λεπτοδείκτη (βλέπε την παρακάτω υπενθύμιση), έπεται ότι: $\varphi_\lambda(t)=2\pi\{t\}$, $\forall t\in \mathbb{R}_{[0,12)}$. (2)



Στο παραπάνω σχήμα, οπτικοποιούνται τα γραφήματα των συναρτήσεων (1) και (2), και σημειώνονται τα σημεία $S_1, S_2, \ldots, S_{11}$ που αντιπροσωπεύουν το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\varphi_\omega(t)=\varphi_\lambda(t)$ στο διάστημα 12 ωρών, δηλαδή στις συμπτώσεις ωροδείκτη με λεπτοδείκτη.

Λόγω των 11 παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται η συνάρτηση $\varphi_\lambda(t)=2\pi\{t\}$, είναι απευθείας ορατό ότι η OS_{11} διαιρείται σε 11 ίσα τμήματα, και συνεπώς η ζητούμενη χρονική απόσταση θα είναι ίση με το ένα ενδέκατο του δωδεκάωρου.

Με τη μετατροπή του κλάσματος 12/11 (όπως και στην προηγούμενη λύση), έπεται ότι ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης <u>κατά προσέγγιση</u>, συναντώνται **κάθε 1 ώρα, 5 λεπτά, 27 δεύτερα και 27 εκατοστά του δευτερολέπτου**.

Υπενθύμιση. ***Παρατηρήσεις πάνω στις συναρτήσεις $\lfloor x\rfloor$ (ή $[x]$), $\lceil x\rceil$ και $\{x\}$.***

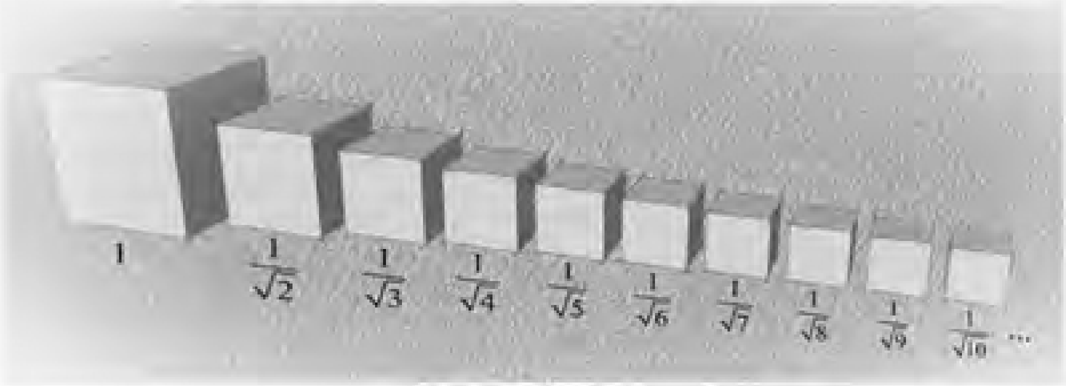
$\lceil x\rceil$: *«Άνω ακέραιος» ή «οροφή» (ceiling) του πραγματικού αριθμού x, είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που δεν είναι μικρότερος από τον x, ή $\lceil x\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq x\}$.*

Πρόβλημα 79. **i)** Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι συνεχής και πληροί τις σχέσεις: $f(1000)=999$, και $f(x)\cdot f\big(f(x)\big)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε τον αριθμό $f(500)$.

ii) Δίνονται κύβοι με ακμές $1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{5}},\dots$ (άπειροι σε πλήθος).

Να αποδείξετε ότι ο συνολικός όγκος των κύβων αυτών, είναι πεπερασμένος, ενώ η συνολική εξωτερική επιφάνειά τους, είναι άπειρη.

Με άλλες λέξεις θα έφτανε να προμηθευτούμε δεδομένη ποσότητα ενός υγρού για να τους γεμίσομε (τους κύβους), ενώ για να τους χρωματίσομε θα ήταν αδύνατον να προμηθευτούμε την απαιτουμένη ποσότητα του χρώματος.



Λύση. **i)** Από τη δεύτερη σχέση έπεται ότι $f(1000)\cdot f\big(f(1000)\big)=1$, οπότε εξαιτίας της πρώτης προκύπτει $999\cdot f(999)=1\Rightarrow f(999)=\frac{1}{999}$.

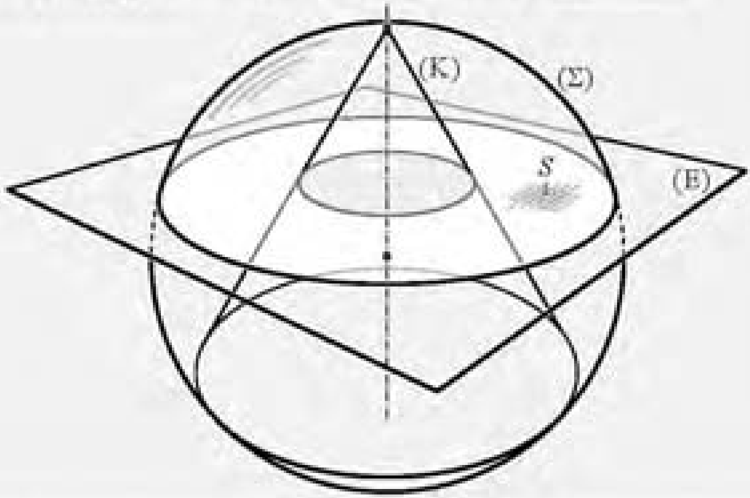
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα του ***Jean Gaston Darboux*** ή θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών (*βλέπε «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος III, σελίδα 1512*), συνάγεται ότι:

Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}_{[999,1000]}$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)=500$.

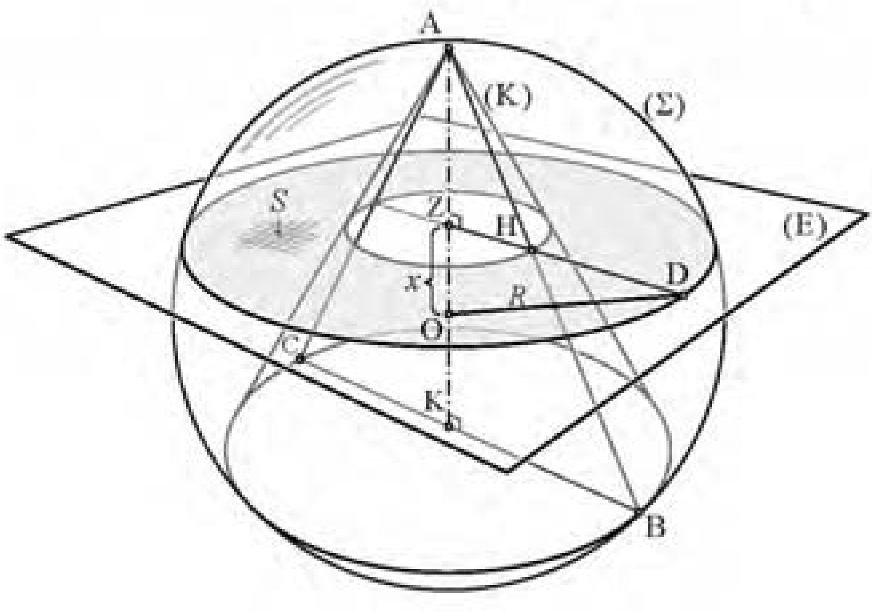
Συνεπώς, ισχύει ότι $f(\xi)\cdot f\big(f(\xi)\big)=1\Rightarrow 500\cdot f(500)=1$, απ' όπου προκύπτει τελικά ότι $f(500)=\frac{1}{500}$, δηλαδή το ζητούμενο.

Σχόλιο. Πράγματι, είναι $f(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_{[1/999,999]}$. Για να βρούμε τη συνάρτηση και εκτός του διαστήματος $\mathbb{R}_{[1/999,999]}$, θεωρούμε ότι η f λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή του διαστήματος $\mathbb{R}_{[1/999,999]}$.

Πρόβλημα 85. Σε μια σφαίρα (Σ) εγγράφομε ισόπλευρο κώνο (Κ). Να προσδιορίσετε επίπεδο (Ε) παράλληλο προς τη βάση του κώνου (Κ) εις τρόπον, ώστε η διαφορά των τομών της σφαίρας και του επιπέδου καθώς και του ισοπλεύρου κώνου και του επιπέδου, να είναι μέγιστη. Δηλαδή, να ισχύει $S \equiv ((\Sigma)\cap(\mathrm{E})) - ((\mathrm{K})\cap(\mathrm{E})) = \mathrm{maximum}$.



Λύση. Η τομή της σφαίρας (Σ) και του επιπέδου (Ε) είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας $\mathrm{DZ} = \sqrt{R^2 - x^2}$. Επιπλέον, η τομή του ισοπλεύρου κώνου (Κ) και του επιπέδου (Ε), είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας HZ, και επομένως ισχύει: $\frac{\mathrm{HZ}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{AK}} \Rightarrow \frac{\mathrm{HZ}}{\frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3}} = \frac{R-x}{\frac{3}{2}R} \Rightarrow \mathrm{HZ} = \frac{R-x}{\sqrt{3}}$.



$$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{1+\sin^2 x}\sqrt{1+\cos^2 x}}=$$

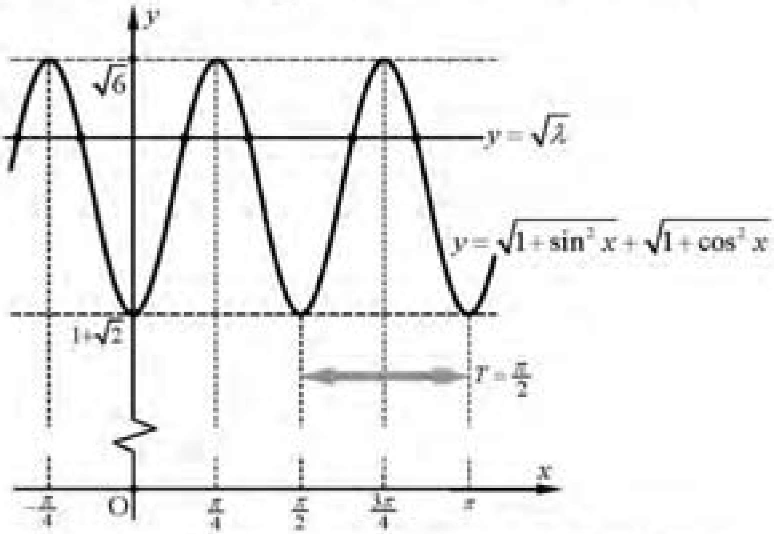
$$=\sqrt{3+2\sqrt{2+\sin^2 x\cos^2 x}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{3+2\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2}}. \qquad (4)$$

Συνεπώς, $f_{\min}=f(x)\big|_{\sin^2 2x=0}\overset{(4)}{=}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$,

και $f_{\max}=f(x)\big|_{\sin^2 2x=1}\overset{(4)}{=}\sqrt{3+2\sqrt{9/4}}=\sqrt{6}$.

Οπότε, επιβεβαιώνεται και με διαφορετικό τρόπο, ο περιορισμός για τον λ ,

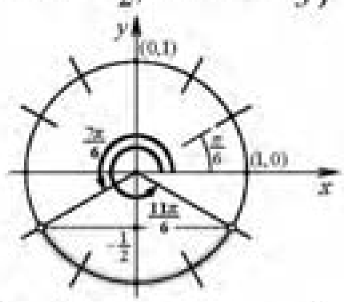
δηλαδή ότι: $f^2_{\min}\le\lambda\le f^2_{\max}\Leftrightarrow(\sqrt{2}+1)^2=3+\sqrt{2}\le\lambda\le 6$.



Λύση. **ii)** Εξετάζομε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις εις τρόπον, ώστε για $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση $\sqrt{4\sin^2 x-1}>1+3\sin x$, να ικανοποιειται.

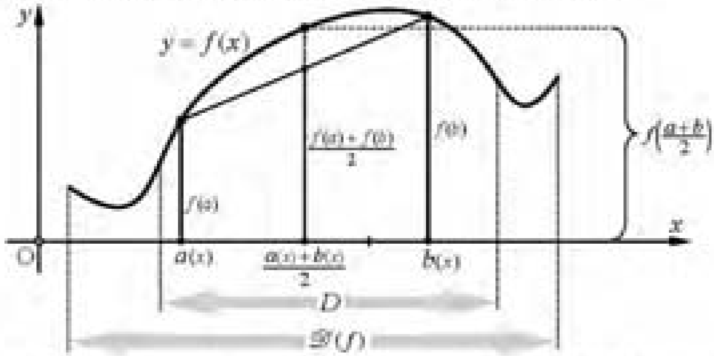
(a) $\left\{4\sin^2 x-1>0\wedge 1+3\sin x\le 0\right\}\Leftrightarrow\left\{\sin^2 x>\frac{1}{4}\wedge\sin x\le-\frac{1}{3}\right\}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\left(\sin x>\frac{1}{2}\vee\sin x<-\frac{1}{2}\right)\wedge\sin x\le-\frac{1}{3}\right\}\Leftrightarrow\sin x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow I_1\equiv\left\{x:x\overset{k\in\mathbb{Z}}{=}2k\pi+\vartheta\wedge\vartheta\in\mathbb{R}_{\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)}\right\}. \qquad (1)$$

Οι αριθμοί a, b δύνανται να θεωρηθούν συναρτήσεις του x, στην περίπτωση που υπάρχει διάστημα $D' \subseteq \mathscr{D}(f)$, τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in D'$, να ισχύει ότι $a(x), b(x) \in D$ και $a(x) \neq b(x)$.



Εστω ότι $a(x) \equiv x + f(x)$ και $b(x) \equiv x - f(x)$ με $f(x) \neq 0$ (δηλαδή για να είναι $a(x) \neq b(x)$). Αν ισχύει ότι $a(x), b(x) \in D$ για κάθε $x \in D'$, η (1) μεταλλάσσεται στην:

$$f\left(\frac{x+f(x)+x-f(x)}{2}\right) > \frac{f\big(x+f(x)\big)+f\big(x-f(x)\big)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\big(x+f(x)\big)+f\big(x-f(x)\big) < 2f(x),\ \forall x \in D', \qquad (2)$$

όπου $D' = \{x:\ x \in \mathbb{R} \wedge x+f(x)>0 \wedge x-f(x)>0 \wedge f(x) \neq 0\}$. (3)

Εφαρμόζομε τις (2),(3) στην $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ με τύπο $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ και $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Η συνάρτηση f είναι γνήσια κοίλη στο $\mathbb{R}_{>0}$, δεδομένου ότι $f''(x) = -\dfrac{2k}{(2k+1)^2 \cdot x \cdot \sqrt[2k+1]{x^2}} < 0$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}_{>1} = D'$, ισχύει ότι: $x \pm \sqrt[2k+1]{x} \in \mathbb{R}_{>0} \wedge \sqrt[2k+1]{x} \neq 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Το διάστημα $D' \subseteq \mathscr{D}(f)$, καθορίστηκε με τον παρακάτω τρόπο:

$$D' = \{x:\ x \in \mathbb{R} \wedge x+f(x)>0 \wedge x-f(x)>0 \wedge f(x) \neq 0\} =$$

$$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x+\sqrt[2k+1]{x}>0 \wedge x-\sqrt[2k+1]{x}>0 \wedge \sqrt[2k+1]{x} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} = \mathbb{R}_{>1}.$$

Επομένως, η ανισότητα (2) στην περίπτωση αυτή γίνεται:

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{x+\sqrt[2k+1]{x}}+\sqrt[2k+1]{x-\sqrt[2k+1]{x}} < 2\cdot\sqrt[2k+1]{x},\ \ \forall x \in \mathbb{R}_{>1} \wedge k \in \mathbb{N}_{\geq 1}}. \qquad (4)$$

Η ανισότητα (4), για $x=3$ και $n=1$ δίνει $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Απόδειξη. **iii)** Για $x = 2017$ και $n = 8$, η γενικευμένη ανισότητα (4) του **(ii)**, μεταλλάσσεται στην $\sqrt[17]{2017+\sqrt[17]{2017}}+\sqrt[17]{2017-\sqrt[17]{2017}} < 2\sqrt[17]{2017}$.

$$q_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}}_{(3n+1)-(n+1)+1=2n+1 \text{ όροι}} < \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1}}_{2n+1 \text{ όροι}} = \frac{2n+1}{n+1} =$$

$= \dfrac{n+(n+1)}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}+1<2$. Και επομένως ισχύει $q_n<2$. (1)

Ωστόσο, για κάθε $n\in\mathbb{N}_{\ge1}$, ισχύει $q_n<q_{n+1}$, δεδομένου ότι:

$$q_n<q_{n+1} \Leftarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} < \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+4} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} \Leftarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} < \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} < \frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} \Leftarrow \frac{1}{9(n+1)^2} < \frac{1}{(3n+2)(3n+4)} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (3n+2)(3n+4) < 9(n+1)^2 \Leftarrow 9n^2+18n+8<9n^2+18n+9 \Leftarrow$$

$\Leftarrow 8<9$, που αληθεύει.

Διαδοχικά, η $q_n<q_{n+1}$ δίνει $q_1<q_2<\ldots<q_n$, και άρα ισχύει ότι:

$q_n>q_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{12+8+6}{24}=\dfrac{13}{12}>1 \Rightarrow q_n>1$. (2)

Από τις (1) και (2), συνάγεται ότι $1<q_n<2$, δηλαδή το ζητούμενο.

Πρόβλημα 117. **i)** Να αποδείξετε ότι: $\left(\sqrt[5]{\dfrac{32}{5}}-\sqrt[5]{\dfrac{27}{5}}\right)^{1/3}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{25}}+\sqrt[5]{\dfrac{3}{25}}-\sqrt[5]{\dfrac{9}{25}}$.

ii) Αν $a\in\left(\mathbb{R}_{\le -1/2}\cup\left\{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\}\cup\mathbb{R}_{\ge 1/2}\right)$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\sqrt[6]{32a^3-6a+\sqrt{(32a^3-6a)^2-1}}=\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{a-\frac{1}{2}}.$$

Στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε ότι αληθεύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$\sqrt[6]{26+15\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt[6]{58\sqrt{2}+31\sqrt{7}}=\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}}$,

$\sqrt[6]{244+63\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ και $\sqrt[6]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}}$.

Σχόλιο. *Τα παραπάνω ριζικά οφείλονται στον χαρισματικό Ινδό μαθηματικό, **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920), ο οποίος άλλαξε ριζικά, το μαθηματικό τοπίο στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, αν και υπήρξε πρακτικά αυτοδίδακτος.*

Απόδειξη. **i)** Αρκεί να αποδείξομε ότι $\left(\dfrac{2}{5^{1/5}}-\dfrac{3^{3/5}}{5^{1/5}}\right)^{1/3}=\dfrac{1}{5^{2/5}}+\dfrac{3^{1/5}}{5^{2/5}}-\dfrac{3^{2/5}}{5^{2/5}} \Leftarrow$

$\dfrac{(2-3^{3/5})^{1/3}}{5^{1/15}}=\dfrac{1+3^{1/5}-3^{2/5}}{5^{2/5}} \overset{\frac{2}{5}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}}{\Leftarrow} 5^{1/3}(2-3^{3/5})^{1/3}=1+3^{1/5}-3^{2/5}$. (1)

$$\Leftarrow 32a^3 - 6a + (16a^2 - 1)\sqrt{4a^2 - 1} =$$
$$= 8a^3 + 6a(4a^2 - 1) + 12a^2\sqrt{4a^2 - 1} + (4a^2 - 1)\sqrt{4a^2 - 1} \Leftarrow$$
$$\Leftarrow 32a^3 - 6a + (16a^2 - 1)\sqrt{4a^2 - 1} = 32a^3 - 6a + (16a^2 - 1)\sqrt{4a^2 - 1},$$

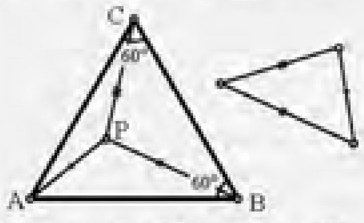
που αληθεύει. Επομένως, για κάθε $a \in \left(\mathbb{R}_{\le -1/2} \cup \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} \cup \mathbb{R}_{\ge 1/2}\right)$,

ισχύει ότι: $\sqrt[6]{32a^3 - 6a + \sqrt{(32a^3 - 6a)^2 - 1}} \equiv \sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{a - \frac{1}{2}}$. (6)

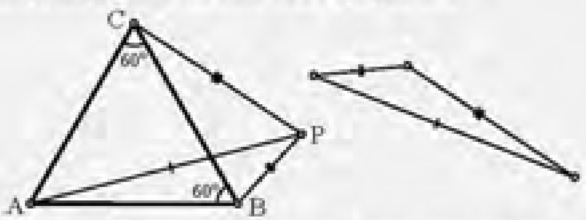
Τέλος, για διάφορες επιτρεπτές τιμές του a, η (6) γίνεται:,

$a = 1$	$\sqrt[6]{26 + 15\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
$a = \sqrt{2}$	$\sqrt[6]{58\sqrt{2} + 31\sqrt{7}} = \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$
$a = 2$	$\sqrt[6]{244 + 63\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt[6]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}$

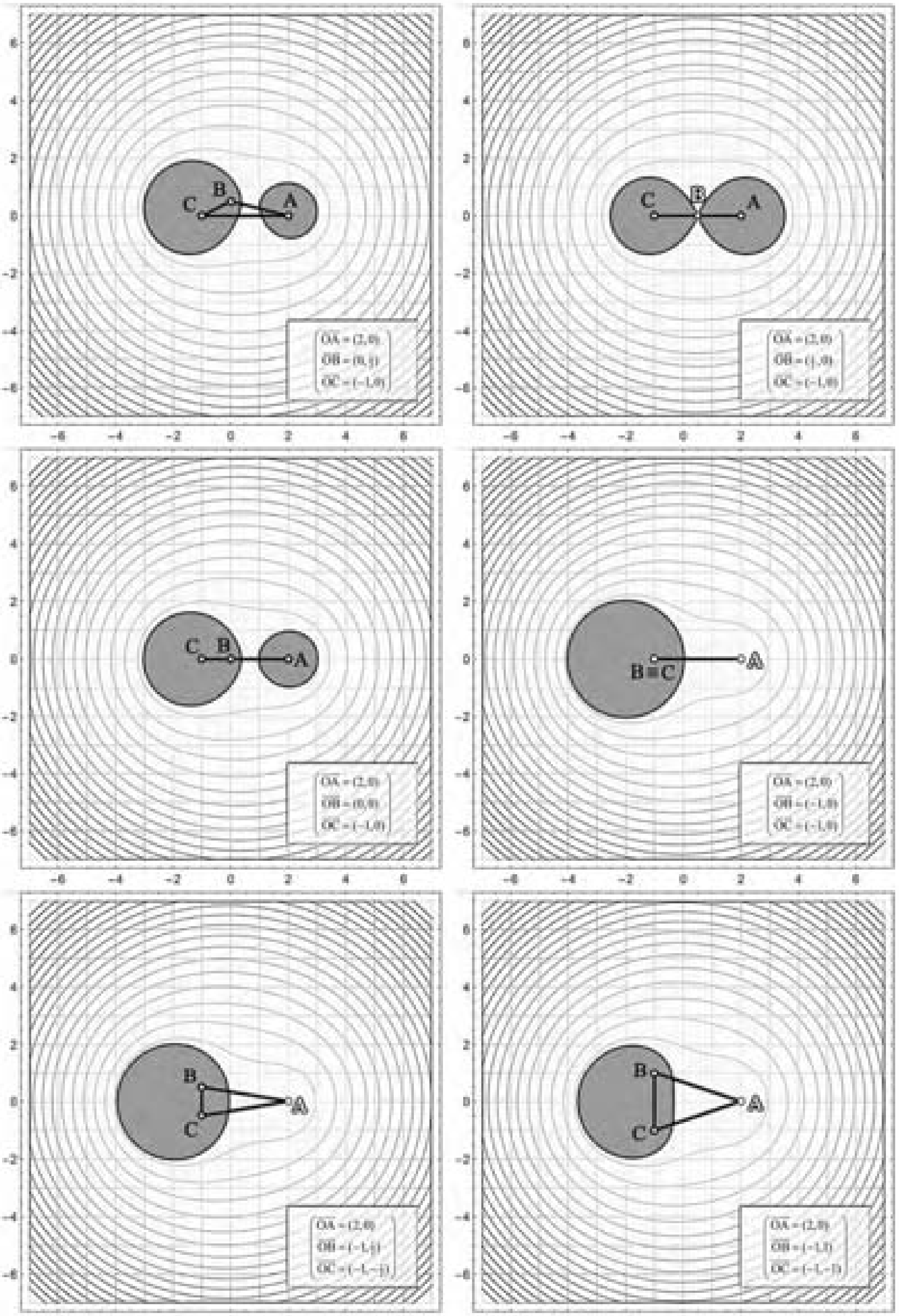
Πρόβλημα 118. **i)** Αν P είναι σημείο στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου $\triangle ABC$, να αποδείξετε ότι τα PA, PB, PC, θα αποτελούν πλευρές τριγώνου.



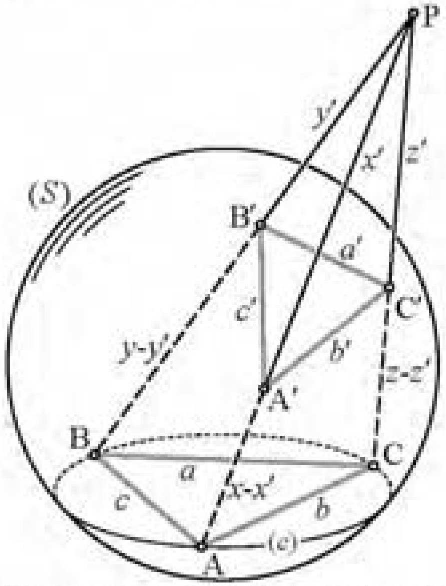
ii) Αν P είναι σημείο, του επιπέδου που ορίζουν οι κορυφές A, B, C ισοπλεύρου τριγώνου $\triangle ABC$, να αποδείξετε ότι τα PA, PB, PC, ή θα αποτελούν πλευρές τριγώνου, ή το μεγαλύτερο από αυτά θα είναι ίσον με το άθροισμα των άλλων δύο τμημάτων.



iii) Αν P είναι σημείο, που δεν περιέχεται στο επίπεδο που ορίζουν οι κορυφές A, B, C ισοπλεύρου τριγώνου $\triangle ABC$, να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα PA, PB, PC αποτελούν πλευρές τριγώνου.

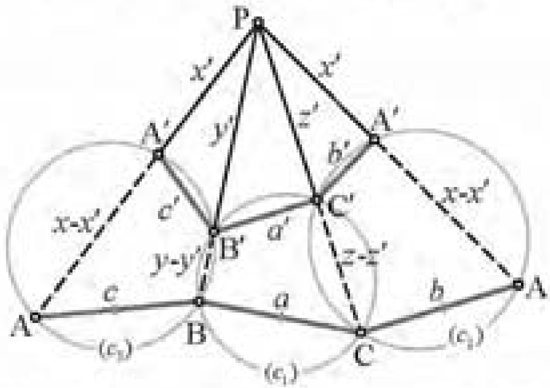

C
B
A
B≡C

Απόδειξη. **iii)** Θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια (S), που περιέχει τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ και το σημείο P που δεν ανήκει στη σφαίρα-στερεό. Έστω ότι είναι $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ τα δεύτερα σημεία (*δηλαδή τα εκτός των* $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$) της σφαίρας (S) με τα τμήματα $\mathrm{PA},\mathrm{PB},\mathrm{PC}$ αντίστοιχα.



$x \equiv \mathrm{PA}$	$a \equiv \mathrm{BC}$
$y \equiv \mathrm{PB}$	$b \equiv \mathrm{CA}$
$z \equiv \mathrm{PC}$	$c \equiv \mathrm{AB}$
$x' \equiv \mathrm{PA}'$	$a' \equiv \mathrm{B'C'}$
$y' \equiv \mathrm{PB}'$	$b' \equiv \mathrm{C'A'}$
$z' \equiv \mathrm{PC}'$	$c' \equiv \mathrm{A'B'}$

Επειδή το σημείο P δεν περιέχεται στο επίπεδο που ορίζουν οι τρεις κορυφές $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ του τριγώνου $\triangle\mathrm{ABC}$, και λόγω του ότι το P ανήκει στο εξωτερικό της σφαίρας (S), συνάγεται ότι τα σημεία $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ είναι διακεκριμένα, και είναι απ' ευθείας ορατό ότι δεν είναι ομοευθειακά, επειδή ανήκουν σε σφαιρική επιφάνεια.



Δεν είναι άγνωστο ότι, η τομή επιπέδου-σφαίρας είναι κύκλος, άρα οι έδρες $\mathrm{PBC},\mathrm{PCA},\mathrm{PAB}$ της τρίεδρης *γωνίας* $\sphericalangle\mathrm{P} \equiv \sphericalangle(\mathrm{PA},\mathrm{PB},\mathrm{PC})$, ορίζουν στη σφαίρα (S) τρεις κύκλους $(c_1),(c_2),(c_3)$ αντίστοιχα.

$$\Leftarrow 2-4\sin^2\frac{2\pi}{9} \geq 0 \Leftarrow \sin^2\frac{2\pi}{9} \leq \frac{1}{2} \Leftarrow \sin^2\frac{2\pi}{9} \overset{\sin\varphi<\varphi}{<} \left(\frac{2\pi}{9}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \Leftarrow$$

$\Leftarrow \pi \leq \dfrac{9}{2\sqrt{2}} \Leftarrow \pi < 3.15 = \dfrac{315}{100} = \dfrac{63}{20} < \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$, που αληθεύει (αφού

$\dfrac{63}{20} < \dfrac{9}{2\sqrt{2}} \Leftarrow \dfrac{7}{10} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow 2\cdot 49 < 100$).

Τελικά, η ζητούμενη τιμή της παράστασης είναι:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\dots}}}}}}} = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Σχόλιο. *Τα χαρακτηριστικά αυτά ριζικά (όπως και πολλά άλλα πρωτότυπα θέματα), οφείλονται στον χαρισματικό Ινδό μαθηματικό,* ***Srinivasa Ramanujan*** *(1887-1920), ο οποίος με τη βοήθεια του μεγάλου Άγγλου μαθηματικού* ***Godfrey Harold "G. H." Hardy*** *(1877-1947), άλλαξε ριζικά το μαθηματικό τοπίο της μαθηματικής επιστήμης.*

Γενικά, το ριζικό της μορφής $x = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{\dots}}}}}}}$ (9)

για κάθε $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *ισούται με τη ρίζα της:* $((x^2-a)^2-a)^2+x-a=0$ *ή της*

$x^8-4ax^6+2a(3a-1)x^4-4(a-1)a^2x^2+x+a(a^3-2a^2+a-1)=0$, (10)

η οποία ρίζα ανήκει στο διάστημα $\mathbb{R}_{\left[\sqrt{a+\sqrt{a}},\,a\right]}$.

Η εξίσωση (10), διαιρείται με το τριώνυμο x^2+x-a, *δηλαδή ισχύει ότι:*

$$(10) \Leftrightarrow (x^2+x-a)\cdot\big(x^6-x^5-(3a-1)x^4+(2a-1)x^3+$$
$$+(3a^2-3a+1)x^2-(a-1)^2x-(a^3-2a^2+a-1)\big)=0. \quad (11)$$

Το τριώνυμο (x^2+x-a) *έχει ρίζες* $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2} < \sqrt{a+\sqrt{a}}$, *για κάθε*

$a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *και άρα δεν μηδενίζεται στο διάστημα* $\sqrt{a+\sqrt{a}} \leq x \leq a$.

Η ανισότητα $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2} < \sqrt{a+\sqrt{a}}$ *αληθεύει, δεδομένου ότι: Για το «πλην» είναι προφανές ότι* $\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0 < \sqrt{a+\sqrt{a}}$ *που αληθεύει. Ενώ για το «συν» ισχύει διαδοχικά* $\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} < \sqrt{a+\sqrt{a}} \Leftarrow -1+\sqrt{1+4a} < 2\sqrt{a+\sqrt{a}} \Leftarrow$

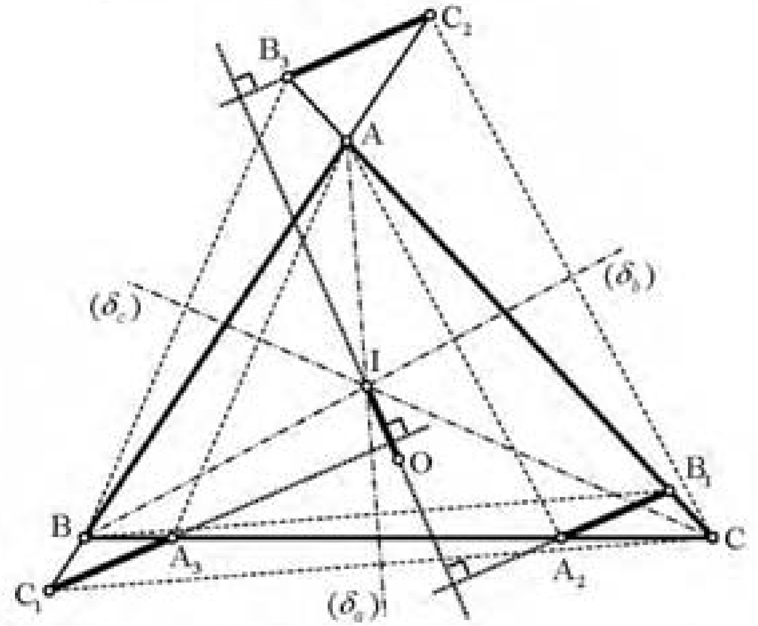
$\Leftarrow \underline{\sqrt{1+4a}-1 \leq 2\sqrt{a}} < 2\sqrt{a+\sqrt{a}}$, *που αληθεύει, (επειδή από* $0 < 4\sqrt{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+4a < 1+4a+4\sqrt{a} \Rightarrow 1+4a < 1+\left(2\sqrt{a}\right)^2+2\cdot 1\cdot 2\sqrt{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+4a < \left(1+2\sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1+4a} < 1+2\sqrt{a} \Rightarrow \underline{\sqrt{1+4a}-1 \leq 2\sqrt{a}}$).

$$(\mathrm{B_3C_2} \parallel \mathrm{C_1A_3} \parallel \mathrm{A_2B_1}) \perp \mathrm{OI},$$

$$\text{με } \frac{\mathrm{B_3C_2}}{\mathrm{IO}} = 2\sin A,\ \frac{\mathrm{C_1A_3}}{\mathrm{IO}} = 2\sin B \text{ και } \frac{\mathrm{A_2B_1}}{\mathrm{IO}} = 2\sin C.$$



Πρόβλημα 132. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι παρακάτω ισότητες:

i) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, ii) $\sqrt{\sqrt[3]{28}-3} = \frac{\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1}{3}$,

iii) $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$, iv) $\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Απόδειξη. i) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \Leftarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{3}{27}} - \sqrt[3]{\frac{6}{27}} + \sqrt[3]{\frac{12}{27}} \Leftarrow$

$\Leftarrow 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12} \Leftarrow 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3\cdot 2} + \sqrt[3]{3\cdot 2\cdot 2} \Leftarrow$

$\Leftarrow 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{3}\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\right) \underset{c^3=2}{\overset{c=\sqrt[3]{2}}{\Leftarrow}} 3\sqrt[3]{c-1} = \sqrt[3]{3}\,(1-c+c^2) \Leftarrow$

$\Leftarrow 3\sqrt[3]{c-1} = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{c^3+1}{c+1} \overset{c^3=2}{\Leftarrow} \sqrt[3]{c-1} = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{c+1} \Leftarrow c-1 = \frac{3}{(c+1)^3} \Leftarrow$

$\Leftarrow (c-1)(c+1)^3 = 3 \Leftarrow (c-1)(c^3+3c^2+3c+1) = 3 \Leftarrow$

$\overset{c^3=2}{\Leftarrow} (c-1)\cdot(3c^2+3c+3) = 3 \Leftarrow (c-1)\cdot(c^2+c+1) = 1 \Leftarrow$

$\Leftarrow (c-1)\cdot\frac{c^3-1}{c-1} = 1 \Leftarrow c^3-1 = 1 \Leftarrow c^3 = 2$, που αληθεύει.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, καταλήγομε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$(\,f(a_1),f(a_2),f(a_3),f(a_4),f(a_5),\dots\,)=(\,7,3,7,3,7,\dots\,).$$

Συνεπώς ισχύει ότι, το τελευταίο ψηφίο του a_k είναι 7 αν ο k είναι περιττός, και 3 αν είναι άρτιος. Δηλαδή $f(a_k)=\begin{cases}7, \text{αν } k=2\ell-1 \\ \quad\;\; {\scriptstyle \ell\in\mathbb{N}_1} \\ 3, \text{αν } k=2\ell\end{cases}$.

Με άλλα λόγια οι αριθμοί $\underbrace{((\dots(((7^7)^7)^7)^7\dots)^7)^7}_{\text{περιττός αριθμός από 7}}$, $\underbrace{((\dots((7^7)^7)^7\dots)^7)^7}_{\text{άρτιος αριθμός από 7}}$, έχουν τελευταίο ψηφίο 7 και 3, αντίστοιχα. Για παράδειγμα έχομε: $(7^7)^7=25692357752105887808861147722423562132160\underline{7}$, $7^7=82354\underline{3}$.

Πρόβλημα 134. Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:
i) x^3-x^2-x-2, **ii)** x^6-1, **iii)** $x^5(x-3)+x^3(3x-1)$, **iv)** x^3-7x-6, **v)** $(x^2+5x)(x^2+5x+10)+24$, **vi)** $(a^4+a+4)^2+8a(a^4+a+4)+15a^2$, **vii)** x^3+3x^2+3x+2, **viii)** $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$, **ix)** $4x^2-12xy+5y^2$, **x)** $(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$, **xi)** $(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n$, **xii)** $x^3-7x^2+7x+15$, **xiii)** x^5+x+1, **xiv)** $x^3+9x^2+27x+19$.

Λύση. **i)** $x^3-x^2-x-2=x^3-1-x^2-x-1=(x^3-1)-(x^2+x+1)=$
$=(x-1)(x^2+x+1)-(x^2+x+1)=(x-2)(x^2+x+1)$.

Αλλιώς. **i)** $x^3-x^2-x-2=x^3-8-x^2-x+6=(x^3-2^3)-(x^2-2^2+x-2)=$
$=(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)(x+3)=(x-2)(x^2+x+1)$.

Λύση. **ii)** $x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3-1)(x^3+1)=$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

Αλλιώς. **ii)** $x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x^2-1)(x^4+2x^2+1-x^2)=$
$=(x-1)(x+1)\big((x^2+1)^2-x^2\big)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Αλλιώς. **ii)** $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=$
$=(x-1)\big(x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\big)=(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)=$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

Λύση. **iii)** $x^5(x-3)+x^3(3x-1)=x^3\big(x^2(x-3)+(3x-1)\big)=$
$=x^3(x^3-3x^2+3x-1)=x^3(x-1)^3$.

$$=(x+1)\left((x^2-x+1)-7(x-1)+7\right)=(x+1)(x^2-8x+15)=$$
$$=(x+1)(x^2-3x-5x+15)=(x+1)\left(x(x-3)-5(x-3)\right)=$$
$$=(x+1)(x-3)(x-5).$$

Λύση. **xiii)** $x^5+x+1=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=$
$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

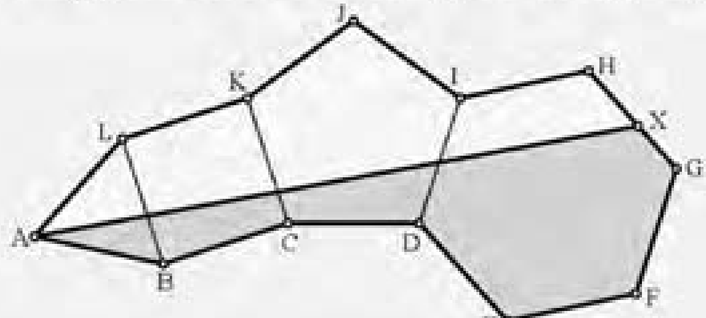
Αλλιώς. **xiii)** $x^5+x+1=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1-x^4-x^3-x^2=$
$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

Αλλιώς. **xiii)** $x^5+x+1=x^5+x^3+x-x^3+1=x(x^4+x^2+1)-(x^3-1)=$
$=x(x^4+2x^2+1-x^2)-(x^3-1)=x\left((x^2+1)^2-x^2\right)-(x^3-1)=$
$=x(x^2+1+x)(x^2+1-x)-(x-1)(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

Λύση. **xiv)** $x^3+9x^2+27x+19=(x^3+9x^2+27x+27)-8=$
$=(x+3)^3-2^3=\left((x+3)-2\right)\left((x+3)^2+2(x+3)+4\right)=$
$=(x+1)(x^2+8x+19).$

Αλλιώς. **xiv)** $x^3+9x^2+27x+19=x^3+1+9x^2-9+27x+27=$
$=(x+1)(x^2-x+1)+9(x+1)(x-1)+27(x+1)=$
$=(x+1)(x^2-x+1+9x-9+27)=(x+1)(x^2+8x+19).$

Πρόβλημα 135. Τα κανονικά πολύγωνα ABL (ισόπλευρο τρίγωνο), BCKL (τετράγωνο), CDIJK (πεντάγωνο) και DEFGHI (εξάγωνο), είναι διαδοχικά, συνδεδεμένα όπως εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα και αποτελούν το ενιαίο χωρίο ABCDEFGHIJKL. Να προσδιορίσετε σημείο X, επί της πλευράς GH τέτοιο, ώστε η AX να διχοτομεί το εμβαδό του χωρίου αυτού, και να υπολογίσετε τον λόγο XH/XG.



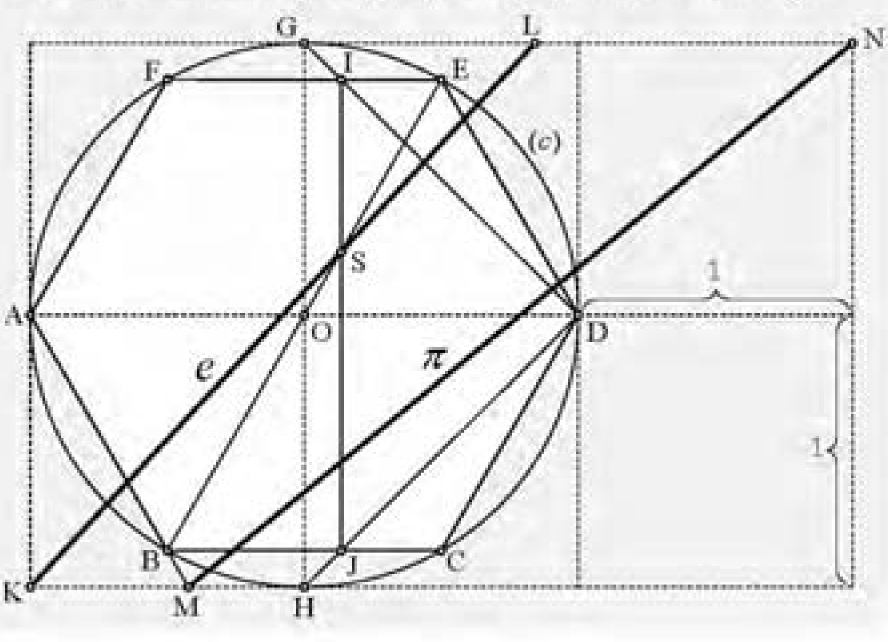
$$\Rightarrow \mathrm{NX} = \frac{2a(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-3\sqrt{3}+4\sqrt{15}+2\right)}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)+8\sqrt{3}}. \qquad (12)$$

Τελικά, $\frac{\mathrm{XH}}{\mathrm{XG}} = \frac{\mathrm{NX}-\mathrm{NH}}{\mathrm{NG}-\mathrm{NX}} = \frac{\mathrm{NX}-a}{2a-\mathrm{NX}}$ και με βάση την (12), συνάγεται ότι:

$$\frac{\mathrm{XH}}{\mathrm{XG}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{15}+17\sqrt{3}+2(\sqrt{5}+1)+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{\sqrt{15}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+2)\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-1\right). \qquad (13)$$

Σημείωση. *Πρακτικά, η αριθμητική τιμή της (13) είναι* $\mathrm{XH}/\mathrm{XG} = 1.292797\ldots$ *και προσεγγίζεται ικανοποιητικά με την* $\frac{\mathrm{XH}}{\mathrm{XG}} = \frac{19}{6\sqrt{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2} = 1.292786\ldots$

Πρόβλημα 136. **i)** Σε ορθογώνιο πλέγμα 1×1 θεωρούμε κύκλο (c) με κέντρο σε σημείο O του πλέγματος, ακτίνας 1 και ο οποίος περιέχει τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{D}, \mathrm{G}$ του πλέγματος (βλέπε το παρακάτω σχήμα). Εγγράφομε το κανονικό εξάγωνο ABCDEF, και θεωρούμε το σημείο M που ορίζει η προέκταση της AB προς το B στη γραμμή του πλέγματος, και τα σημεία $\{\mathrm{I}\} \equiv \mathrm{DG} \cap \mathrm{EF}$, $\{\mathrm{J}\} \equiv \mathrm{DH} \cap \mathrm{BC}$ και $\{\mathrm{S}\} \equiv \mathrm{IJ} \cap \mathrm{BE}$.
Επιπλέον, θεωρούμε το L που ορίζει η προέκταση της KS προς το S στη γραμμή του πλέγματος, και το σημείο N του πλέγματος. Να αποδείξετε ότι τα μήκη των γεωμετρικά κατασκευάσιμων τμημάτων KL, MN, αποτελούν προσέγγιση των αριθμών e, π αντίστοιχα.



Πρόβλημα 137. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω ορίων:

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$,

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$,

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ (τουλάχιστον με δύο τρόπους),

v) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2\varphi)^{1/\varphi}d\varphi\right)$, **vi)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}$,

vii) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\sqrt{18+x+y}\cdot\dfrac{x+y^2}{\sqrt{1+4x+4y}}\cdot\sin\dfrac{1}{x+y^2}\right)$,

viii) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{(a^3-b^3)(\sqrt[3]{8+xy}-2)(x^2y+a)}{x^2y(xy+b)}$ με $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$,

ix) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$, **x)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(\dfrac{(1+y^2)\sin x}{x},\dfrac{\sin x\sin y}{\sin(xy)}\right)$,

xi) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\operatorname{Arcsin}x-\frac{\pi}{2})^2}{1-x^2}$, **xii)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{n\cos\sqrt[4]{x/n^2}}{1+n^2x^2}dx$,

xiii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[4]{3x}+\ldots\sqrt[n+1]{nx}}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt[3]{3x+\ldots+\sqrt[n]{nx}}}}}$,

xiv) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$,

xv) $Q=\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\dfrac{\sin^m\vartheta}{\vartheta^n}d\vartheta$ $(m,n\in\mathbb{N})$,

xvi) $L=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}\left(1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos^{a_k}kx\right)\right)$, $a_k\in\mathbb{Q}$ και $k\in\mathbb{N}_{[1,n]}$,

xvii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, $k,n\in\mathbb{N}$.

Πρόβλημα 138. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x^4}{x^{10}+2}dx$, **ii)** $\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx$, **iii)** $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$,

iv) $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}dx$, **v)** $\int \frac{3\sin x+4\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, **vi)** $\int \frac{\sin x+2\cos x}{2\sin x+\cos x}dx$,

vii) $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{k\sin x+\ell\cos x}dx$, **viii)** $\int \frac{x}{x^2+x-6}dx$, **ix)** $\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx$,

x) $\int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3}dx$, **xi)** $\int \frac{x^4}{(1+x^2)^2}dx$, **xii)** $\int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh x+\cosh x}$,

xiii) $\int \frac{x}{1+\cos x}dx$, **xiv)** $\int \frac{x}{1+\sec x}dx$, **xv)** $\int \cos\left(a\ln\frac{x}{b}\right)dx$,

xvi) $\int \frac{\sin\ln x}{x^3}dx$, **xvii)** $\int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx$.

Λύση. **i)** $\int \frac{x^4}{x^{10}+2}dx=\frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{(x^5)^2+2}=\left|\begin{array}{l} x^5\equiv u\sqrt{2} \\ d(x^5)=\sqrt{2}\,du \end{array}\right|=\frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{2}\,du}{2u^2+2}=$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2+1}=c+\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u=c+\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{x^5}{\sqrt{2}}.$$

Λύση. **ii)** $\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx=\int \frac{(x^2+1-2x)+(2x-2)+2-1}{(x-1)^5}dx=$

$$=\int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^5}d(x-1)=\left|\begin{array}{l} x-1\equiv u \\ d(x-1)=du \end{array}\right|=\int \frac{u^2+2u+1}{u^5}du=$$

$$=\int \frac{u^2}{u^5}du+\int \frac{2u}{u^5}du+\int \frac{1}{u^5}du=\int u^{-3}du+2\int u^{-4}du+\int u^{-5}du=$$

$$=\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+\frac{2u^{-4+1}}{-4+1}+\frac{u^{-5+1}}{-5+1}+c=c-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}.$$

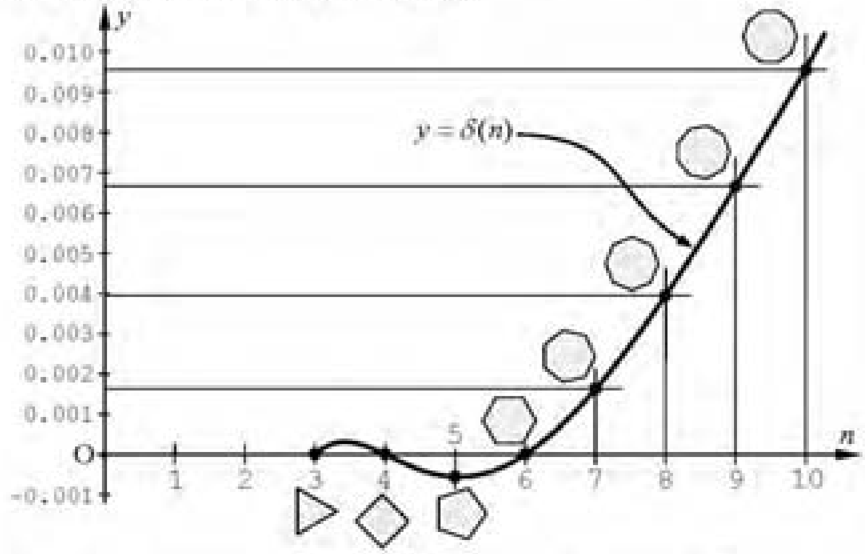
Λύση. **iii)** $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{\left(\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx\right)'dx}{x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2}=\int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=$

$$=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\left|\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}\equiv u\sqrt{2} \\ d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{2}\,du \end{array}\right|=\int \frac{\sqrt{2}du}{2u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2+1}=$$

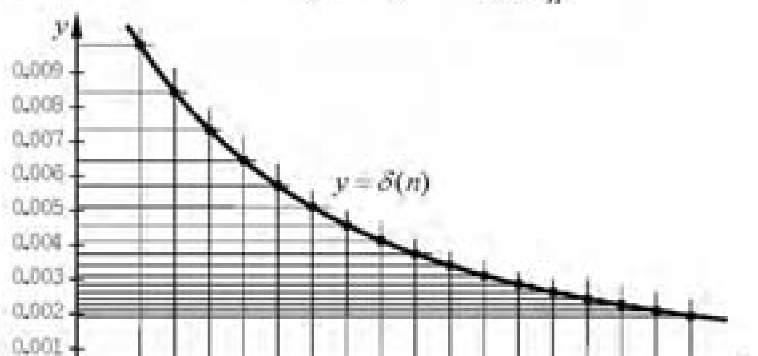
$$=c+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u=c+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}.$$

Λύση. **iv)** $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}dx=\int \frac{(1-x^4)+x^4}{x^4(1+x^2)}dx=\int \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{x^4(1+x^2)}dx+$

Αξιομνημόνευτο είναι το γράφημα της συνάρτησης (6), το οποίον οπτικοποιείται στο παρακάτω σχήμα:



Επισήμανση. **1)** *Στην περίπτωση που ο αριθμός των πλευρών n ενός κανονικού πολυγώνου είναι μεγαλύτερος του 12, το σφάλμα της διαφοράς χορδής $a=2R\sin\frac{\pi}{n}$ και τόξου $\widehat{a}=\frac{2\pi}{n}$, είναι ίσον με $\delta(n)=\dfrac{\widehat{a}-a}{a}=\dfrac{\widehat{a}}{a}-1=\dfrac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}-1$.*

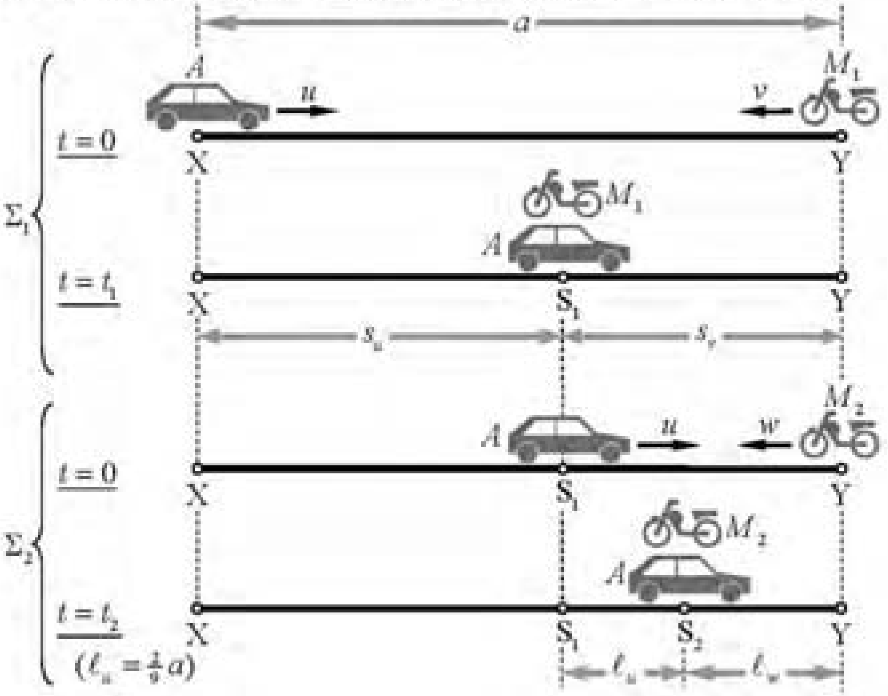


Συνέπεια της παραπάνω παρατήρησης είναι ότι για την κατά προσέγγιση γεωμετρική κατασκευή πολυγώνων με $n\in\mathbb{N}_{\geq 13}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για πλευρά την $a=2R\sin\frac{\pi}{n}=\frac{2\pi R}{n}$. Η γεωμετρική κατασκευή της περιμέτρου $2\pi R$, είναι δυνατόν να γίνει με βάση την κατασκευή του ***Adam Adamandy Kochański*** *του προβλήματος 136 στη σελίδα 440 του παρόντος βιβλίου.*

Επισήμανση. **2)** *Μόνο ένα υποσύνολο του συνόλου των κανονικών πολυγώνων κατασκευάζονται γεωμετρικά (με κανόνα και διαβήτη). Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν να κατασκευάζουν γεωμετρικά, πολύγωνα με 3,4,5 πλευρές, και επίσης γνώριζαν να κατασκευάζουν από ένα δεδομένο κανονικό πολύγωνο ένα άλλο με διπλάσιο αριθμό πλευρών.*

Λύση. Η διαδοχική οπτικοποίηση των προτάσεων του προβλήματος στα παρακάτω σχήματα, καθιστά ιδιαίτερα εύκολη τη σύνταξη και την κατανόηση των εξισώσεων που θα μας δώσουν το ζητούμενο.

Οι προτάσεις της πρώτης παραγράφου, οπτικοποιούνται ως εξής:



Από τις εξισώσεις κίνησης των οχημάτων και τη γεωμετρική συνθήκη συνάντησης των οχημάτων A, M_1 (βλέπε το Σ1), έχομε ότι:

$$\begin{Bmatrix} s_u = u\cdot t_1 \\ s_v = v\cdot t_1 \\ s_u + s_v = a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} s_u = u\cdot t_1 \\ s_v = v\cdot t_1 \\ u\cdot t_1 + v\cdot t_1 = a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} s_u = u\cdot t_1 \\ s_v = v\cdot t_1 \\ t_1 = \dfrac{a}{u+v} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_u = \dfrac{u\cdot a}{u+v} & (1) \\ s_v = \dfrac{v\cdot a}{u+v} & (2) \\ t_1 = \dfrac{a}{u+v} & (3) \end{cases}$$

Για να υπολογίσομε το διάστημα $S_1S_2 = \ell_u$ μεταξύ των διαδοχικών συναντήσεων του αυτοκινήτου A με τις μοτοσυκλέτες M_1, M_2, θα θεωρήσομε ότι, το αυτοκίνητο A και η μοτοσυκλέτα M_2 ξεκινούν από τα σημεία S_1 και Y κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ (βλέπε το Σ2) και από τη σχέση (2) θα λάβομε την τιμή της απόστασης $S_1Y = s_v$.

Επομένως $\begin{Bmatrix} \ell_u = u\cdot t_2 \\ \ell_w = w\cdot t_2 \\ \ell_u + \ell_w = s_v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \ell_u = u\cdot t_2 \\ \ell_w = w\cdot t_2 \\ u\cdot t_2 + w\cdot t_2 = s_v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \ell_u = u\cdot t_1 \\ \ell_v = w\cdot t_1 \\ t_2 = \dfrac{s_v}{u+w} \end{Bmatrix} \Rightarrow$

Επειδή, οι μοτοσυκλέτες έχουν ταχύτητα μικρότερη του αυτοκινήτου, ισχύει ότι $x=\dfrac{v}{u}<1$, και επομένως ισχύει $\dfrac{v}{u}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=2v$. (21)

Από την $(20)\overset{(21)}{\Rightarrow}(2v)\cdot v+200=10(2v)+30v\Rightarrow v^2-25v+100=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\{\,v=5\ \vee\ v=20\,\}\overset{(21)}{\Rightarrow}\{(u,v)=(10,5)\ \vee\ (u,v)=(40,20)\}$. (22)

Τελικά, η (18) για τις τιμές αυτές δίνει $\left\{\begin{matrix} a=3(10+5-20)=-15 \\ a=3(40+20-20)=120\end{matrix}\right\}$,

και συνεπώς η μοναδική λύση είναι $\underline{a=XY=120\,km}$, όταν το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα $40\,km/h$ και οι μοτοσυκλέτες $20\,km/h$.

Πρόβλημα 142. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν η ανισότητες:

i) $7\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{5}>27$,

ii) $\sqrt[7]{5}+\sqrt{14}>5$,

iii) $253\sqrt{2}+874\sqrt{3}+582\sqrt{5}>3173$,

iv) $\sqrt[9]{502}+\sqrt[502]{9}>3$

Απόδειξη. **i)** Αρκεί $7\sqrt{2}+6\sqrt{3}>27-3\sqrt{5}\Leftarrow\left(7\sqrt{2}+6\sqrt{3}\right)^2>\left(27-3\sqrt{5}\right)^2\Leftarrow$

$\Leftarrow 206+84\sqrt{6}>774-162\sqrt{5}\Leftarrow 103+42\sqrt{6}>387-81\sqrt{5}\Leftarrow$

$\Leftarrow 42\sqrt{6}+81\sqrt{5}>387-103=284\Leftarrow 3\left(27\sqrt{5}+14\sqrt{6}\right)>284\Leftarrow$

$\Leftarrow 9\left(27\sqrt{5}+14\sqrt{6}\right)^2>284^2\Leftarrow 9\left(4821+756\sqrt{30}\right)>80\,656\Leftarrow$

$\Leftarrow 6804\sqrt{30}>80\,656-43\,389=37\,267\Leftarrow 30\cdot 6804^2>37\,267^2\Leftarrow$

$\Leftarrow \mathbf{1388}832\,480>\mathbf{1388}829\,289$, που αληθεύει.

Απόδειξη. **ii)** Αρκεί $\sqrt[7]{5}+\sqrt{14}>5\Leftarrow\sqrt[7]{5}>5-\sqrt{14}\Leftarrow 5>\left(5-\sqrt{14}\right)^7\Leftarrow$

$\Leftarrow 5>\binom{7}{0}5^7-\binom{7}{1}5^6\cdot\sqrt{14}+\binom{7}{2}5^5\cdot 14-\binom{7}{3}5^4\cdot 14\cdot\sqrt{14}+\binom{7}{4}5^3\cdot 14^2-$

$-\binom{7}{5}5^2\cdot 14^2\cdot\sqrt{14}+\binom{7}{6}5\cdot 14^3-\binom{7}{7}14^3\cdot\sqrt{14}\Leftarrow$

$\Leftarrow 5>5^7-7\cdot 5^6\cdot\sqrt{14}+21\cdot 5^5\cdot 14-35\cdot 5^4\cdot 14\cdot\sqrt{14}+35\cdot 5^3\cdot 14^2-$

$-21\cdot 5^2\cdot 14^2\cdot\sqrt{14}+7\cdot 5\cdot 14^3-14^3\cdot\sqrt{14}\Leftarrow$

$\Leftarrow 5>(5^7+21\cdot 5^5\cdot 14+35\cdot 5^3\cdot 14^2+7\cdot 5\cdot 14^3)-$

$-(7\cdot 5^6+35\cdot 5^4\cdot 14+21\cdot 5^2\cdot 14^2+14^3)\sqrt{14}\Leftarrow$

Συνεπώς $2z^2-2z+3 \overset{(1),(3)}{=} \left(-101 \mp i\,10\sqrt{302}\right)-\left(-10 \pm i\sqrt{302}\right)+3=$

$=-88 \mp i\,11\sqrt{302} \Rightarrow 2z^2-2z+3=(-11)\left(8 \pm i\sqrt{302}\right).$ (4)

Τελικά η παράσταση $\mathscr{H}(z)=(z+1)\cdot(2z^2-2z+3)+4 \overset{(2),(4)}{=}$

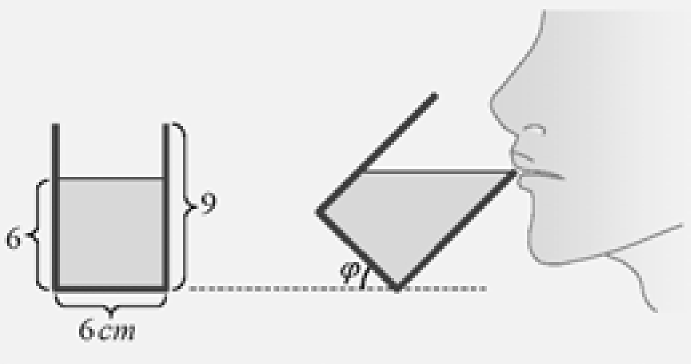
$\overset{(2),(4)}{=} \dfrac{\pm i\sqrt{302}-8}{2}\cdot(-11)(\pm i\sqrt{302}+8)+4=-11\cdot\dfrac{\left(\pm i\sqrt{302}\right)^2-8^2}{2}+4=$

$=-11\cdot\frac{1}{2}(-302-64)+4=11\cdot(151+32)+4=11\cdot 183+4=2017.$

Αλλιώς. **iii)** Παρατηρούμε ότι $\mathscr{H}(10)=11\cdot 183+4=2017$ και επομένως το πολυώνυμο $P(z)=\mathscr{H}(z)-2017=0$ έχει ως ρίζα την $z=10$.

Επειδή $\mathscr{H}(z)=(z+1)\cdot(2z^2-2z+3)+4=2z^3+z+7$, έπεται ότι $P(z)=2z^3+z+7-2017=2z^3+z-2010=(2z^3-2000)+(z-10)=$
$=2(z^3-10^3)+(z-10)=(z-10)\cdot(2z^2+20z+201)\equiv(z-10)\cdot Q(z)$,
δηλαδή το $P(z)$ θα μηδενίζεται και από τις ρίζες $z_{1,2}$ του τριωνύμου $Q(z)=2z^2+20z+201$. Και συνεπώς για τις ρίζες αυτές όπως και για την $z=10$ θα ισχύει $P(10)=P(z_1)=P(z_2)=0$ γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\mathscr{H}(10)=\mathscr{H}(z_1)=\mathscr{H}(z_2)=2017$.

Πρόβλημα 147. **i)** Κυλινδρικό ποτήρι με ύψος 9cm και ακτίνα βάσεως 3cm, περιέχει νερό με ύψος στάθμης 6cm. Να υπολογίσετε τη γωνία φ κατά την οποία πρέπει να στραφεί το ποτήρι για να αρχίσομε να πίνομε νερό.



ii) Κυλινδρικό ποτήρι με ύψος h και ακτίνα βάσεως R, περιέχει νερό με ύψος στάθμης h_0. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\bar{h}\equiv h/R$ και $\bar{h}_0\equiv h_0/R$ ($\bar{h}>\bar{h}_0$) ώστε, όταν στραφεί το ποτήρι κατά γωνία $45°$, να αρχίσομε να πίνομε νερό.

Πρόβλημα 148. **i)** Ρίχνουμε έξι ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε έξι (εξάρες) διαφορετικές ενδείξεις;

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα έτσι, ώστε μετά τη ρίψη 100 νομισμάτων, 50 ακριβώς από αυτά να έχουν ένδειξη κορώνα.
Στη συνέχεια να προσεγγίσετε την πιθανότητα αυτή χωρίς τη χρήση υπολογιστή.

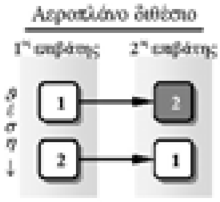
iii) Ρίχνομε ένα ζάρι δύο φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι μικρότερο του δέκα».

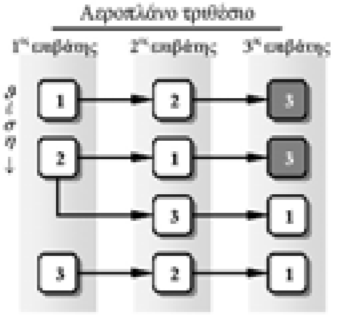
iv) Αν η πιθανότητα να φέρομε μία τουλάχιστον φορά έξι, όταν ρίξομε ένα ζάρι τέσσερις φορές είναι $\mathcal{P}_1$, και αν η πιθανότητα να φέρομε εξάρες, όταν ρίξομε δύο ζάρια εικοσιτέσσερις φορές είναι $\mathcal{P}_2$, να υπολογίσετε τους αριθμούς $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ και να αποδείξετε χωρίς τη χρήση υπολογιστή ότι $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2$.

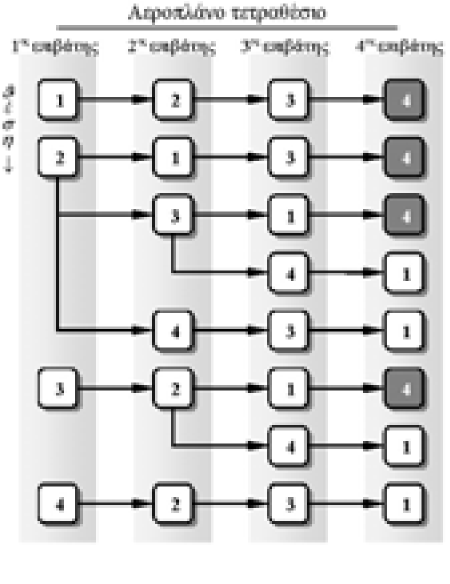
v)Ενας αριθμός επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $\mathbb{R}_{(0,1)}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα έτσι, ώστε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του, να είναι 2. Και στη συνέχεια την πιθανότητα έτσι, ώστε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του τετραγώνου του, να είναι 4.

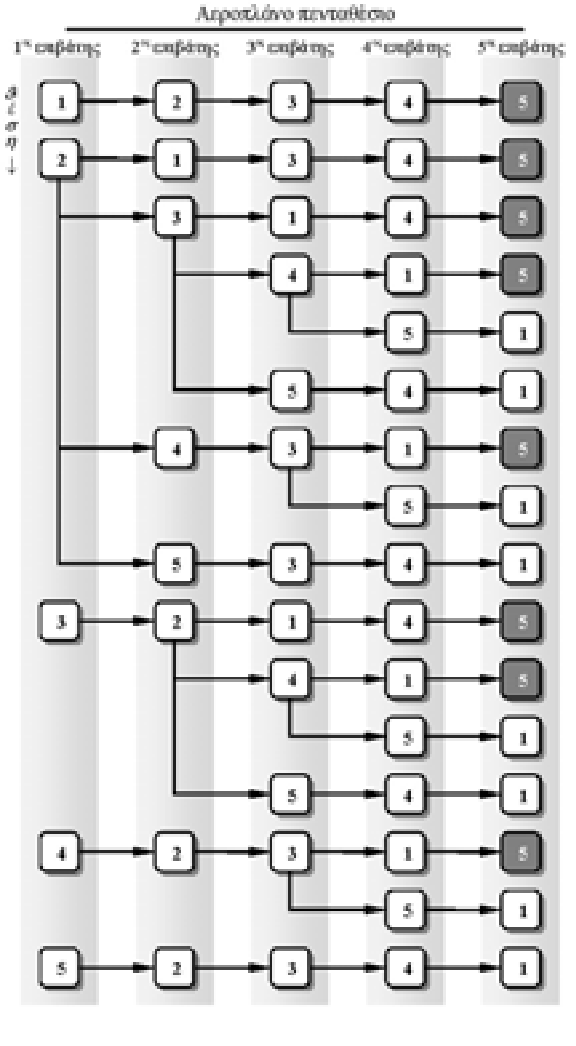
vi) Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή και το 25% και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
1) Να έχει ένα μόνο από τα δύο.
2) Να μην έχει κανένα από τα δύο.
3) Να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

vii) Εκατό επιβάτες στη σειρά αναμένουν να επιβιβαστούν σε ένα αεροπλάνο εκατό θέσεων. Ο πρώτος επιβιβάζεται στο αεροπλάνο, αλλά δυστυχώς έχει χάσει το απόκομμα του εισιτηρίου του, το οποίο δείχνει σε ποια θέση πρέπει να καθίσει, κι έτσι κάθεται σε μια θέση στην τύχη. Ο επόμενος επιβάτης κάθεται κανονικά στη θέση που αναγράφει το εισιτήριό του, εκτός κι αν είναι κατειλημμένη, οπότε κάθεται κι αυτός σε μια θέση στην τύχη. Αυτό επαναλαμβάνεται έως ότου έρθει η σειρά να επιβιβαστεί ο εκατοστός επιβάτης. Τι πιθανότητα έχει ο εκατοστός επιβάτης να καθίσει στη θέση που αναγράφει το εισιτήριό του;

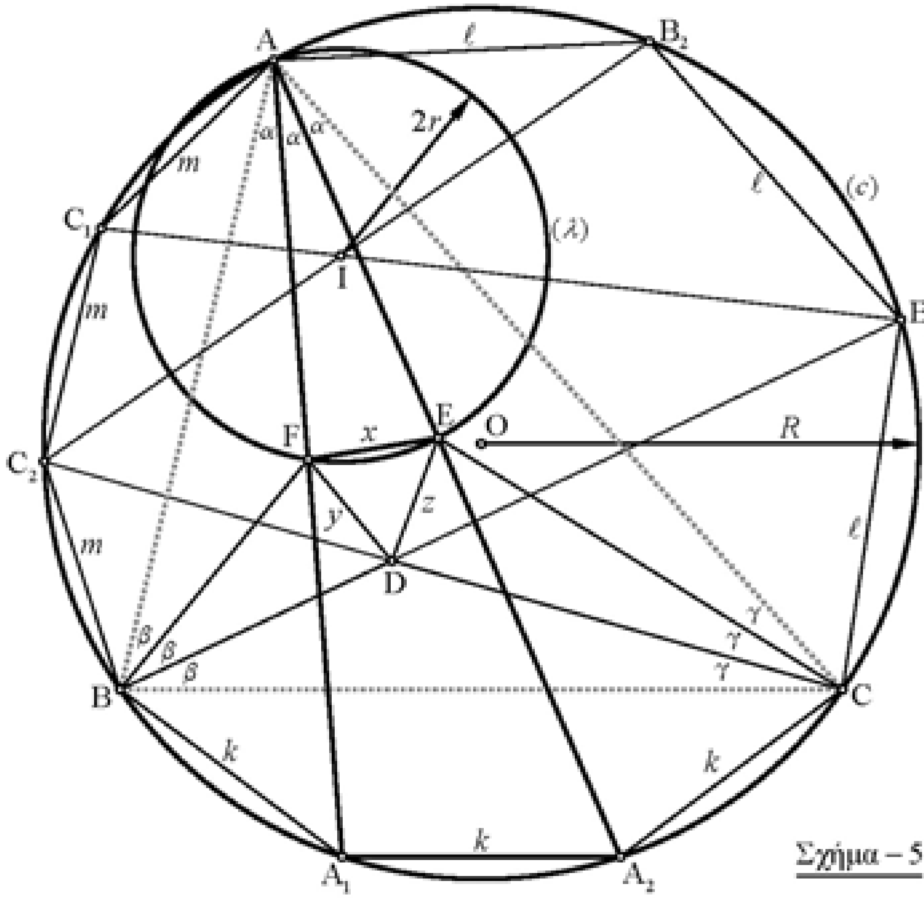








Αν σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαγράμματα, μετρήσομε τις δυσμενείς περιπτώσεις δ και τις διαιρέσομε με το σύνολο των περιπτώσεων f, παρατηρούμε ότι για n θέσεις και n επιβάτες, η πιθανότητα $\mathcal{P}$ «να μην καθίσει ο τελευταίος επιβάτης στη θέση του» είναι:



Σχήμα – 5

Επισήμανση 1η :«… μόνο τα πολύ στοιχειώδη θεωρήματα έχουν πλήρως αποδειχτεί με ά μ ε σ η απόδειξη. Όλα τα υπόλοιπα αποδεικνύονται με τη βοήθεια άλλων θεωρημάτων, που είναι ήδη γνωστά: Μια ολόκληρη αλυσίδα θεωρημάτων μας πηγαίνει πίσω, στα αξιώματα. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι μια απόδειξη είναι ά μ ε σ η , αν ένα από εκείνα τα βοηθητικά θεωρήματα έχει αποδειχτεί με έ μ μ ε σ η απόδειξη. Μερικά από τα πιο απλά και τα πιο βασικά θεωρήματα έχουν έ μ μ ε σ η απόδειξη».

H. S. M. Coxeter και S. L. Greitzer, GEOMETRY REVISITED

1967, by The Mathematical Association of America

Επισήμανση 2η :Αν τεθεί $\left\{\begin{array}{l} k = 2R\sin\dfrac{\mathrm{A}}{3} \\ \ell = 2R\sin\dfrac{\mathrm{B}}{3} \\ m = 2R\sin\dfrac{\mathrm{C}}{3} \end{array}\right\}$, *η σχέση* $x = \dfrac{k\cdot\ell\cdot m}{R^2}$ *μεταλλάσσεται στην:*