ΤΟΜΟΣ II

ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΝΩΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

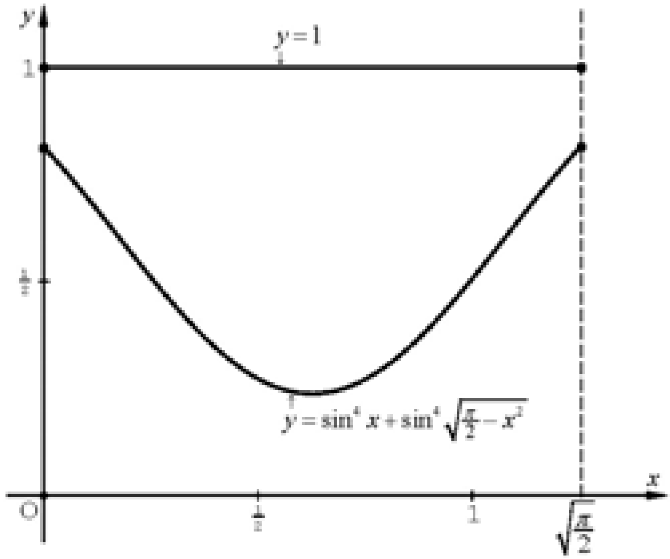
ΜΑΝΟΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

- Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση
- Μαθηματική Επαγωγή
- Αριθμοθεωρία - Πιθανοθεωρία
- Εξισώσεις και Συστήματα
- Μόνιμες Ανισότητες - Ανισώσεις
- Ευκλείδεια Γεωμετρία του Επιπέδου
- Ευκλείδεια Γεωμετρία Τρισδιάστατου Χώρου
- Αθροίσματα - Ακολουθίες - Όρια
- Ολοκληρώματα Αόριστα - Ορισμένα
- Ολοκληρώματα Γενικευμένα
- Τριγωνομετρία - Μιγαδικοί Αριθμοί
- Συναρτήσεις - Πολυώνυμα - Παράγωγος
- Διανυσματικός Λογισμός
- Απλές Διαφορικές Εξισώσεις
- Συναρτησιακές Σχέσεις και Εξισώσεις

ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

«ΟΥΣΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

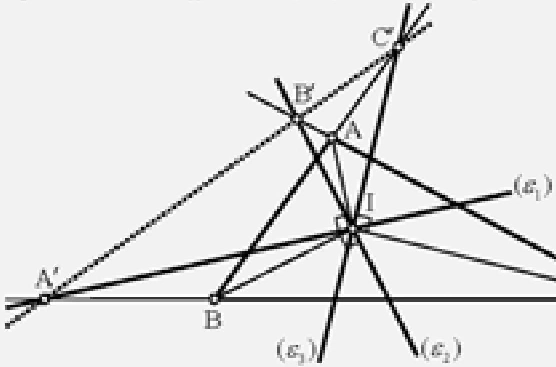


Πρόβλημα 2. **i)** Αν οι $a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}\wedge abc=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{1+b}+\frac{b^2}{1+c}+\frac{c^2}{1+a}\geq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$$

ii) Από το έγκεντρο I τριγώνου ABC, φέρομε τις ευθείες (ε_1), (ε_2), (ε_3) κάθετες στα IA, IB, IC, αντίστοιχα.

Αν είναι $\{A'\}\equiv(\varepsilon_1)\cap BC$, $\{B'\}\equiv(\varepsilon_2)\cap CA$ και $\{C'\}\equiv(\varepsilon_2)\cap AB$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A',B',C' είναι ομοευθειακά.



Απόδειξη. Από την ανισότητα των ***Cauchy–Schwarz–Buniakowski*** έχομε:

$$(1+b+1+c+1+a)\cdot\left(\frac{a^2}{1+b}+\frac{b^2}{1+c}+\frac{c^2}{1+a}\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt{1+b}\right)^2+\left(\sqrt{1+c}\right)^2+\left(\sqrt{1+a}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{1+b}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{1+c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{1+a}}\right)^2\right)\overset{C.S.B.}{\geq}$$

$$\geq\left(\sqrt{1+b}\cdot\frac{a}{\sqrt{1+b}}+\sqrt{1+c}\cdot\frac{b}{\sqrt{1+c}}+\sqrt{1+a}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+a}}\right)^2=(a+b+c)^2.$$

I)	$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2,\ \begin{matrix}a_k,b_k\in\mathbb{R}\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{matrix}$,	«=» $\Leftrightarrow \begin{cases}a_ib_\ell=a_\ell b_i\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{cases}$
II)	$\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_n}\geq\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k}\geq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kb_k},\ \begin{matrix}a_k,b_k\in\mathbb{R}_{>0}\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{matrix}$,	«=» $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_\ell}{b_\ell}\\ \forall i,\ell\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{cases}$
III)	$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}b_k,\ \begin{matrix}a_k,b_k\in\mathbb{R}_{>0}\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{matrix}$,	«=» $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_\ell}{b_\ell}\\ \forall i,\ell\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{cases}$
IV)	$\frac{a_1}{b_1^2}+\frac{a_2}{b_2^2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n^2}\geq\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\cdot\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k^2}\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\right)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}a_k,\ \begin{matrix}a_k,b_k\in\mathbb{R}_{>0}\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{matrix}$,	«=» $\Leftrightarrow \begin{cases}b_i=b_\ell\\ \forall i,\ell\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{cases}$
V)	$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,\ \begin{matrix}a_k,b_k\in\mathbb{R}_{>0}\\ \forall k\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{matrix}$,	«=» $\Leftrightarrow \begin{cases}b_i=b_\ell\\ \forall i,\ell\in\mathbb{N}_{[1,n]}\end{cases}$

Αποδείξεις:

I) *Από την ταυτότητα του* ***Lagrange*** *(βλέπε «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος Ι, σελίδα 408, αξιοσημείωτη ταυτότητα 34) έχουμε:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\equiv\sum_{1\leq i<j\leq n}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}^2\equiv\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \text{ όπου } a_k,b_k\in\mathbb{R} \text{ για κάθε } k\in\mathbb{N}_{[1,n]}.$$

Το «ίσον» ισχύει αν, και μόνο αν $a_ib_\ell=a_\ell b_i$ *για κάθε* $i,\ell\in\mathbb{N}_{[1,n]}$.

Για ένα διαφορετικό τρόπο απόδειξης, βλέπε: σελ.526, ανισότητα 2, του παραρτήματος.

II) *Αν* $a_k,b_k\in\mathbb{R}_{>0}$ *για κάθε* $k\in\mathbb{N}_{[1,n]}$ *έχουμε:*

$$\left(\left(\sqrt{a_1}\right)^2+\left(\sqrt{a_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{a_n}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{b_1}\right)^2+\left(\sqrt{b_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{b_n}\right)^2\right)\overset{(1)}{\geq}$$

$$\geq\left(\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{b_1}+\sqrt{a_2}\cdot\sqrt{b_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{b_n}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_n}\geq\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}.$$

Πρόβλημα 12. **i)** Αν $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, να αποδείξετε ότι:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

ii) Αν $a,b,c,d \in \mathbb{R}_{>0}$ και $a+b+c+d=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{cda}{b+2}+\frac{dab}{c+2}+\frac{abc}{d+2} < \frac{1}{13}.$$

iii) Αν $a,b,c \in \mathbb{R}_{(0,1)}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Απόδειξη. **i)** Αν $\left\{\begin{matrix} y+z=a & (1) \\ z+x=b & (2) \\ x+y=c & (3) \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \frac{a+b+c}{2} = x+y+z \overset{(1)}{=} a+x \overset{(2)}{=} b+y \overset{(3)}{=} c+z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=\frac{b+c-a}{2} \\ y=\frac{a+c-b}{2} \\ z=\frac{a+b-c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4xy=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab \\ 4yz=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2bc \\ 4zx=b^2-(c-a)^2=b^2-c^2-a^2+2ca \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow 4(xy+yz+zx)=(2ab-c^2)+(2bc-a^2)+(2ca-b^2)$ και επομένως ισχύει ότι: $\sum\limits_{\circlearrowleft x,y,z} yz = \frac{1}{4}\sum\limits_{\circlearrowleft a,b,c}(2bc-a^2)$ (4)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ισχύει $a \geq b \geq c$. (5)

Από $a \geq b \geq c \to \left\{\begin{matrix} \xrightarrow{+a} 2a \geq \underline{a+b \geq c+a} \\ \xrightarrow{+b} a+b \geq 2b \geq b+c \\ \xrightarrow{+c} \underline{c+a \geq b+c} \geq 2c \end{matrix}\right\} \Rightarrow b+c \leq c+a \leq a+b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} b^2+c^2+2bc & \leq & c^2+a^2+2ca & \leq & a^2+b^2+2ab \\ -(a^2+b^2+c^2) & = & -(a^2+b^2+c^2) & = & -(a^2+b^2+c^2) \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow 2bc-a^2 \leq 2ca-b^2 \leq 2ab-c^2$. (6)

Εξαιτίας των (5),(6), με εφαρμογή της ανισότητας του ***Chebyshev*** (*παράρτημα, σελ.527, ανισότητα 3*) και του ***Cauchy*** (*παράρτημα, σελ.526, ανισότητα 1 και «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος Ι, σελ.560*) διαδοχικά έχομε:

$$\frac{4}{9}\left(\sum_{\circlearrowleft x,y,z} yz\right)\left(\sum_{\circlearrowleft x,y,z}\frac{1}{(y+z)^2}\right) \overset{(1),(2),(3),(4)}{=} \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}\sum_{\circlearrowleft a,b,c}(2bc-a^2)\cdot\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\frac{1}{a^2} =$$

$$=\left(\frac{1}{3}\sum_{\circlearrowleft a,b,c}(2bc-a^2)\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\frac{1}{a^2}\right) \overset{\text{Chebyshev}}{\geq} \frac{1}{3}\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\left((2bc-a^2)\cdot\frac{1}{a^2}\right) =$$

$\Rightarrow \measuredangle PMM' = \frac{\pi}{2} - \measuredangle QNN' \Rightarrow \measuredangle PMM' = \measuredangle NQN'$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle PMM'$ και $\triangle QNN'$ είναι όμοια, και συνεπώς $\frac{MM'}{PM'} = \frac{QN'}{NN'} \Rightarrow \frac{MM'}{QN'} = \frac{PM'}{NN'} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{MM'}{KM'} = \frac{KN'}{NN'}$. (3)

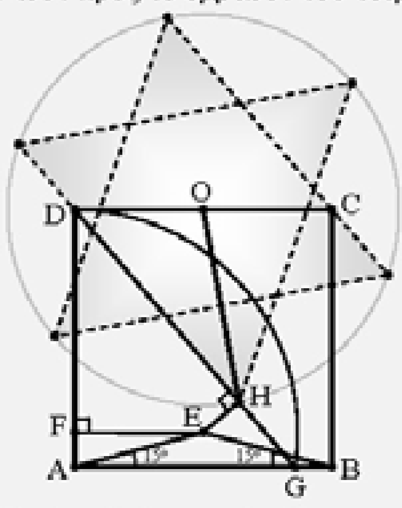
Από τις (2),(3) $\Rightarrow \triangle KM'M \approx \triangle NN'K \Rightarrow \begin{cases} \measuredangle MKM' = \measuredangle KNN' = \varphi \\ \measuredangle KMM' = \measuredangle NKN' = \vartheta \end{cases}$ (4)

Η $\measuredangle M'KN' \overset{M'K \parallel AQ}{=} \measuredangle KN'Q = \measuredangle KN'O_2 + \measuredangle O_2N'Q \overset{(4)}{=} \varphi + \vartheta + 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle M'KN' - (\varphi + \vartheta) = 90° \Rightarrow \measuredangle MKN = 90°$.

Σχόλιο. Βλέπε και Quantum, Σεπτέμβριος / Οκτώβριος 1998, τόμος 5 / τεύχος 5.

Πρόβλημα 16. **i)** Στο εσωτερικό τετραγώνου $ABCD$ λαμβάνομε σημείο E τέτοιο, ώστε $\measuredangle EAB = \measuredangle EBA = 15°$ και φέρομε την EF κάθετο στην AD. Ο κύκλος με κέντρο το ίχνος F και ακτίνα FD τέμνει την AB στο σημείο G. Αν EH είναι η κάθετη στην GD και O το μέσο της CD, να αποδείξετε ότι ο αστέρας κανονικού εξαγώνου με ακτίνα OH, έχει εμβαδόν ίσον προς το εμβαδόν του τετραγώνου $ABCD$.



ii) Θεώρημα των ***Steiner-Lehmus***: Αν δύο εσωτερικές διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Απόδειξη. **i)** Δεν είναι άγνωστο ότι όταν $\measuredangle EAB = \measuredangle EBA = 15°$, το $\triangle DEC$ είναι ισόπλευρο (*βλέπε «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος* I : {*σελίδα* 709, *άσκηση* 96} *και τόμος* II : {*σελίδα* 911, *άσκηση* 11}, {*σελίδα* 956/1006, *άσκηση* 7}).

Επομένως, αν a είναι η πλευρά του τετραγώνου $ABCD$, θα έχομε $DE = EC = CD = a$ και $\measuredangle DEO = 30°$. (1)

Εξαιτίας των (1) και (2) η ανισότητα προς απόδειξη γίνεται:

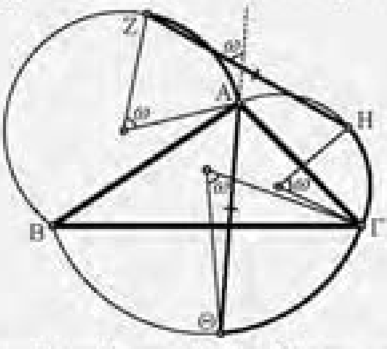
$$S=\frac{x^2}{m-x}+\frac{y^2}{m-y}+\frac{z^2}{m-z}\geq\frac{3}{2} \text{ με } xyz=1. \qquad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(t)=\frac{t^2}{m-t}$ στο διάστημα $\mathbb{R}_{(0,m)}$, η οποία έχει δεύτερη παράγωγο $f''(t)=\frac{2m^2}{(m-t)^3}>0$ και είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Από την ανισότητα του ***Jensen*** έχομε:

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{1}{3}\cdot S\geq\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^2}{m-\frac{m}{3}}=\frac{\frac{m^2}{9}}{\frac{2m}{3}}=\frac{m}{6}\Rightarrow$$

$$S\geq\frac{m}{2}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\overset{Cauchy}{\geq}\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{xyz}\overset{xyz=1}{=}\frac{3}{2}\Rightarrow S\geq\frac{3}{2}.$$

Πρόβλημα 21. **i)** Σε ένα προσανατολισμένο επίπεδο δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Επί της πλευράς ΑΒ και εκτός του τριγώνου γράφομε τόξο που να δέχεται γωνία φ οξεία ή ορθή και επί των πλευρών ΒΓ και ΓΑ τόξα, που δέχονται γωνία ίση προς $\pi-\varphi$. Στην συνέχεια λαμβάνομε επί των τόξων αυτών τα Ζ,Θ,Η εις τρόπον ώστε $|\widehat{AZ}|=|\widehat{\Theta\Gamma}|=|\widehat{\Gamma H}|=\omega$. Ζητείται να αποδειχθεί ότι ΑΘ = ΖΗ και $\measuredangle(A\Theta, ZH)=\omega$.



ii) Σε ένα προσανατολισμένο επίπεδο δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΔ και ΑΒ αυτού και εκτός του τετραπλεύρου, γράφομε τόξα που δέχονται γωνία φ (οξεία ή ορθή) ενώ στις πλευρές ΓΔ και ΒΓ τόξα, που δέχονται γωνία ίση προς $\pi-\varphi$. Κατόπιν επί του τόξου χορδής ΑΔ λαμβάνομε σημείο Ε, επί του τόξου ΑΒ σημείο Ζ, επί του τόξου χορδής ΒΓ σημείο Η και επί του τόξου χορδής ΓΔ σημείο Θ, εις τρόπον ώστε, $\widehat{EA}=\widehat{AZ}=\widehat{H\Gamma}=\widehat{\Gamma\Theta}=\omega$. Ζητείται να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ και $\measuredangle(EH, Z\Theta)=\omega$.

$\Rightarrow_\triangle ZKH =_\triangle AK\Theta \Rightarrow \underline{ZH = A\Theta} \wedge \measuredangle KZH = \measuredangle KA\Theta$. (14)

Αν Π είναι το σημείο τομής των ΖΗ και ΑΘ, από την (14), προκύπτει ότι, το τετράπλευρο ΚΠΑΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
Συνεπώς ισχύει ότι $\measuredangle ZKA = \measuredangle Z\Pi A = \underline{\measuredangle(A\Theta, ZH) = \omega}$.

Αλλιώς. **i)** Έστω K, Λ, N τα κέντρα των κύκλων που περιέχουν τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που δέχονται γωνίες $\varphi, \pi-\varphi, \pi-\varphi$ αντίστοιχα.
Είναι προφανές ότι $\measuredangle AKB = \measuredangle A\Lambda\Gamma = \measuredangle BN\Gamma = 2\varphi$ και επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα $_\triangle KAB$, $_\triangle \Lambda\Gamma A$, $_\triangle NB\Gamma$ είναι όμοια. Έχομε:

$$_\triangle KAB \approx _\triangle \Lambda\Gamma A \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{AK}{A\Lambda} = \dfrac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{A\Lambda}{A\Gamma} \\ \measuredangle KAB = \measuredangle \Lambda A\Gamma \Rightarrow \measuredangle KA\Lambda = \measuredangle BA\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow$$

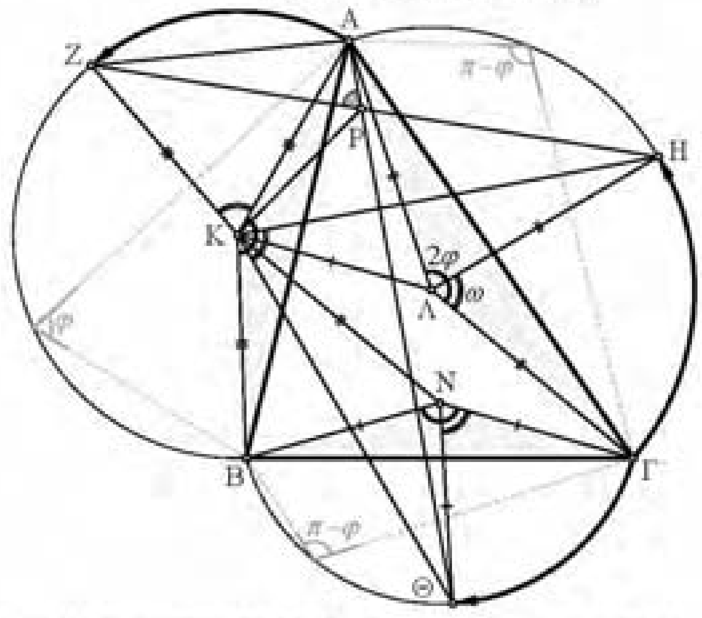
$$\Rightarrow _\triangle AK\Lambda =_\triangle AB\Gamma \qquad (1)$$

$$_\triangle KAB \approx _\triangle NB\Gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{BK}{BN} = \dfrac{BA}{B\Gamma} \Rightarrow \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BN}{B\Gamma} \\ \measuredangle KBA = \measuredangle NB\Gamma \Rightarrow \measuredangle KBN = \measuredangle AB\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow _\triangle KBN \approx _\triangle AB\Gamma \qquad (2)$$

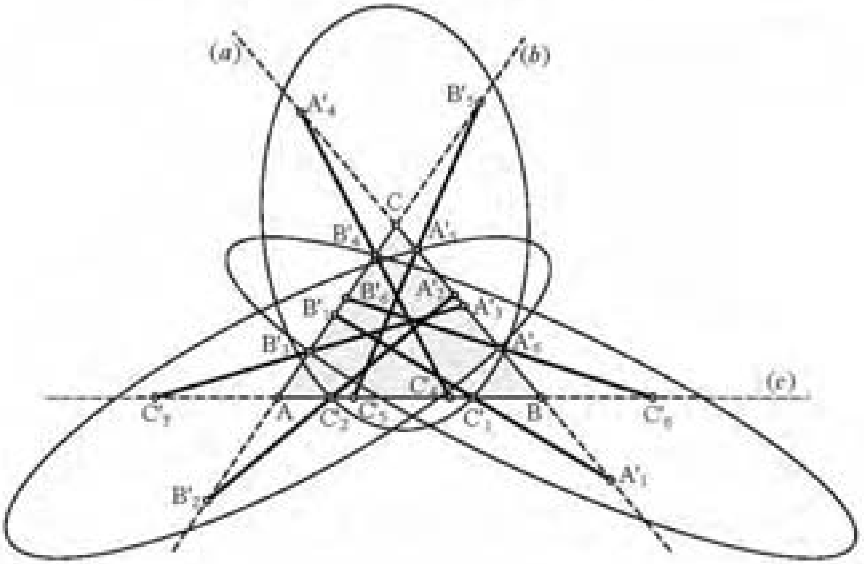
Από $_\triangle AK\Lambda \overset{(1),(2)}{\approx} {}_\triangle KBN \wedge AK = KB \Rightarrow _\triangle AK\Lambda =_\triangle KBN$ (3)

Άρα ισχύουν οι ισότητες: $\left\{\begin{array}{c} K\Lambda = NB = N\Gamma = N\Theta \\ KN = \Lambda A = \Lambda\Gamma = \Lambda H \end{array}\right\}$. (4)



Λόγω της (4) το τετράπλευρο ΚΛΓΝ είναι παραλληλόγραμμο. (5)
Εξαιτίας της (5) είναι $\measuredangle KN\Gamma = \measuredangle K\Lambda\Gamma$ και επομένως είναι:

Σχόλιο. *Αν ζητηθεί να κατασκευαστεί ευθεία τέμνουσα το τρίγωνο ABC ώστε, αν είναι A′,B′,C′ τα κοινά σημεία αυτής με τις πλευρές BC,CA,AB αντίστοιχα, ένα εκ των τριών αυτών σημείων, να ισαπέχει των δύο άλλων, δεδομένη απόσταση, τότε: ο αριθμός τριάδων A′,B′,C′ που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος μπορεί να είναι 0 έως και 6. Παράδειγμα με έξι τριάδες τέτοιων σημείων οπτικοποιείται στο παρακάτω σχήμα:*



Πρόβλημα 29. **i)** Να βρεθούν οι πραγματικές ρίζες της $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}$, (E) αν όλα τα ριζικά που περιέχει, είναι πραγματικοί αριθμοί.

ii) Να βρεθούν οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (E), στην περίπτωση που τα ριζικά που περιέχει, δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Διευκρίνιση: *Για την τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού* a, *στο ερώτημα* (**ii**) *του παραπάνω προβλήματος, να θεωρήσετε ότι:* $\sqrt{a}\equiv\begin{cases}\sqrt{a}, & \text{αν } a\in\mathbb{R}_{\geq 0}\\ i\sqrt{-a}, & \text{αν } a\in\mathbb{R}_{<0}\end{cases}$ *όπου* $i=\sqrt{-1}$.

Λύση. **i)** Δεδομένου ότι ισχύουν οι $x-1\geq 0\wedge x-2\geq 0\wedge x-3\geq 0$ και ο αριθμός $x=3$ δεν είναι ρίζα (επειδή $\sqrt{3-1}+\sqrt{3-2}=\sqrt{3-3}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=0$ άτοπο), εξετάζομε μόνο το διάστημα $x\in\mathbb{R}_{>3}$.

Για $x\in\mathbb{R}_{>3}$ ισχύει $(E)\Leftrightarrow x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)}=x-3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+2\sqrt{(x-1)(x-2)}=0$ αδύνατον, δεδομένου ότι για $x\in\mathbb{R}_{>3}$ το αριστερό μέλος είναι θετικό. Επομένως, η επίλυση της (E) στο $\mathbb{R}$ με όλα τα ριζικά πραγματικούς αριθμούς, δίνει σύνολο λύσεων $L=\varnothing$.

Αλλιώς. **i)** Για να μην είναι κανένα από τα υπόρριζα αρνητικό (πραγματικά ριζικά), θα πρέπει να αναζητήσομε λύσεις στο $\mathbb{R}_{\geq 3}$. Για $x\in\mathbb{R}_{\geq 3}$ έχομε:

Απόδειξη. $\begin{Bmatrix} (1-a)\cdot(b-c)^2 \geq 0 \\ (1-b)\cdot(c-a)^2 \geq 0 \\ (1-c)\cdot(a-b)^2 \geq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} b^2+c^2-2bc-ab^2-ac^2+2abc \geq 0 \\ c^2+a^2-2ca-bc^2-ba^2+2abc \geq 0 \\ a^2+b^2-2ab-ca^2-cb^2+2abc \geq 0 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2(\underline{a^2+b^2+c^2}-(ab+ac+bc))+6abc \geq ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+$$
$$+ca^2+cb^2 \wedge (a+b+c)^2 = 1 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\underline{1-2(ab+bc+ca)}-(ab+ac+bc))+6abc+\underline{3abc} \geq$$
$$\geq (\underline{abc}+b^2c+bc^2)+(a^2c+\underline{abc}+ac^2)+(a^2b+ab^2+\underline{abc}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2-6(ab+bc+ca)+9abc \geq (a+b+c)bc+(a+b+c)ca+$$
$$+(a+b+c)ab = ab+bc+ca \Rightarrow 2+9abc \geq 7(ab+bc+ca).$$

Γενίκευση. Αν $a,b,c \in \mathbb{R}_{>0}$ και $a+b+c=h$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$7h(ab+bc+ca) \leq 2h^3+9abc.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξομε ότι η $\mathcal{P} = 2h^3+9abc-7h(ab+bc+ca) \geq 0$.

Έχομε $\mathcal{P} = 2(a+b+c)^3+9abc-7(a+b+c)(ab+bc+ca) =$

$$= 2(a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b+3c^2a+3a^2c+6abc)+$$
$$+9abc-7(a^2b+b^2a+c^2b+b^2c+c^2a+a^2c+3abc) =$$
$$= 2a^3+2b^3+2c^3+6a^2b+6b^2a+6b^2c+6c^2b+6c^2a+6a^2c+12abc+$$
$$+9abc-7a^2b-7b^2a-7c^2b-7b^2c-7c^2a-7a^2c-21abc =$$
$$= 2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-b^2a-b^2c-c^2b-c^2a-a^2c =$$
$$= (a^3-a^2b-b^2a+b^3)+(b^3-b^2c-c^2b+c^3)+(c^3-c^2a-a^2c+a^3) =$$
$$= \left(a^2(a-b)-b^2(a-b)\right)+\left(b^2(b-c)-c^2(b-c)\right)+\left(c^2(c-a)-a^2(c-a)\right) =$$
$$= (a^2-b^2)(a-b)+(b^2-c^2)(b-c)+(c^2-a^2)(c-a) =$$
$$= (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow \mathcal{P} \geq 0.$$

Σημείωση. Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνομε ότι ισχύει η αξιοσημείωτη ταυτότητα:

$$2(a+b+c)^3+9abc-7(a+b+c)(ab+bc+ca) \equiv$$
$$\equiv (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2. \qquad (\tau)$$

Αλλιώς. $\begin{Bmatrix} (h-a)\cdot(b-c)^2 \geq 0 \\ (h-b)\cdot(c-a)^2 \geq 0 \\ (h-c)\cdot(a-b)^2 \geq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} h(b^2+c^2-2bc)-ab^2-ac^2+2abc \geq 0 \\ h(c^2+a^2-2ca)-bc^2-ba^2+2abc \geq 0 \\ h(a^2+b^2-2ab)-ca^2-cb^2+2abc \geq 0 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2h(\underline{a^2+b^2+c^2}-(ab+ac+bc))+6abc \geq ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+$$
$$+ca^2+cb^2 \wedge (a+b+c)^2 = h^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow$$

Απόδειξη. **i)** *Υπενθύμιση:* $\left\{\begin{aligned} 2(b^2+c^2)\equiv(b+c)^2+(b-c)^2,\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\equiv\frac{1-\cos\varphi}{2} \\ 4bc\equiv(b+c)^2-(b-c)^2,\ \cos^2\frac{\varphi}{2}\equiv\frac{1+\cos\varphi}{2}\end{aligned}\right\}$.

Έχομε $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\varphi=\frac{1}{2}2(b^2+c^2)-\frac{1}{2}(4bc)\cos\varphi=$

$=\frac{1}{2}\left((b+c)^2+(b-c)^2\right)-\frac{1}{2}\left((b+c)^2-(b-c)^2\right)\cos\varphi=$

$=(b+c)^2\frac{1-\cos\varphi}{2}+(b-c)^2\frac{1+\cos\varphi}{2}=(b+c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

Δεν είναι άγνωστο ότι ισχύει $|b-c|\le b+c$, $\forall b,c\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ και επομένως

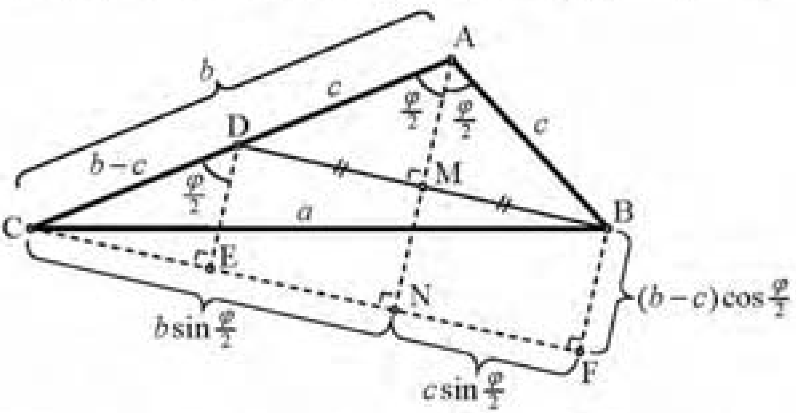
$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+|b-c|^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\le(b+c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(b+c)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}=$

$=(b+c)^2\Rightarrow a^2\le(b+c)^2\wedge a,b,c\in\mathbb{R}_{\ge 0}\Rightarrow a\le b+c$. Επιπλέον,

$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+|b-c|^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\ge|b-c|^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+|b-c|^2\cos^2\frac{\varphi}{2}=$

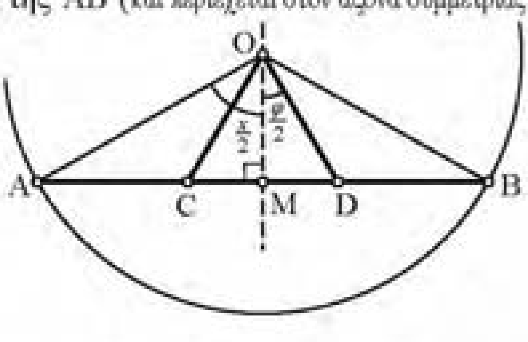
$=|b-c|^2\Rightarrow a^2\ge|b-c|^2$ και επειδή $a\in\mathbb{R}_{\ge 0}$, έπεται ότι $a\ge|b-c|$.

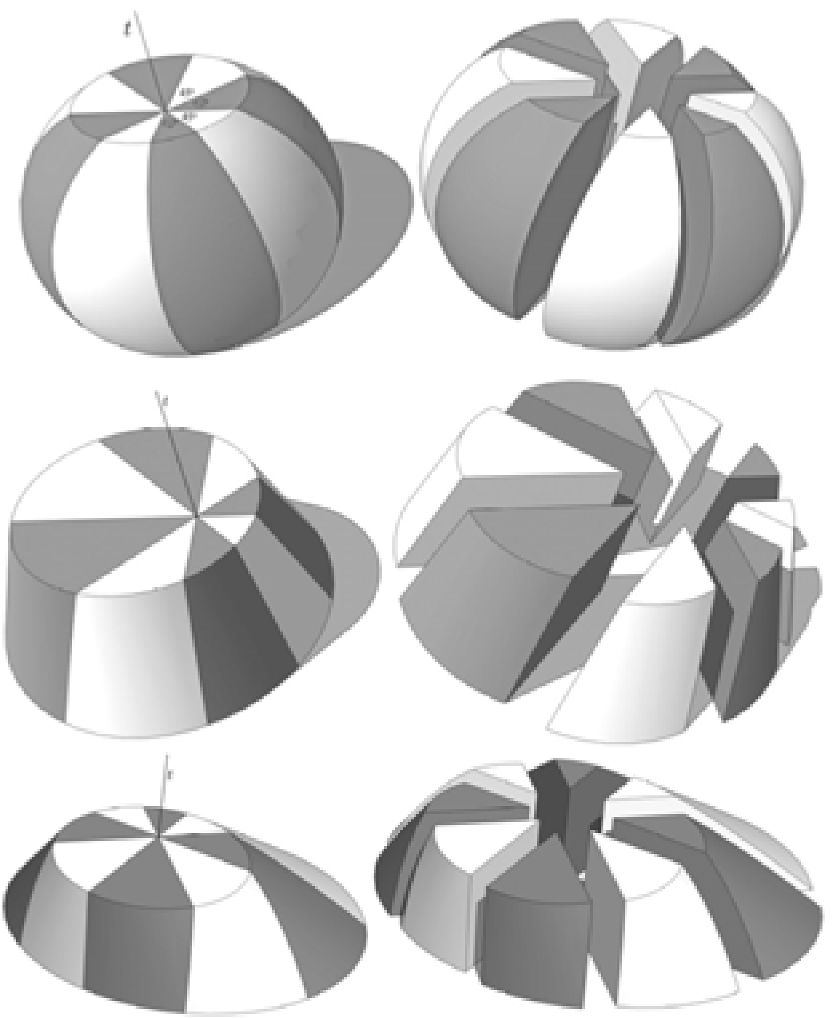
Αλλιώς. **i)** Χωρίς λόγια, απόδειξη της $a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.



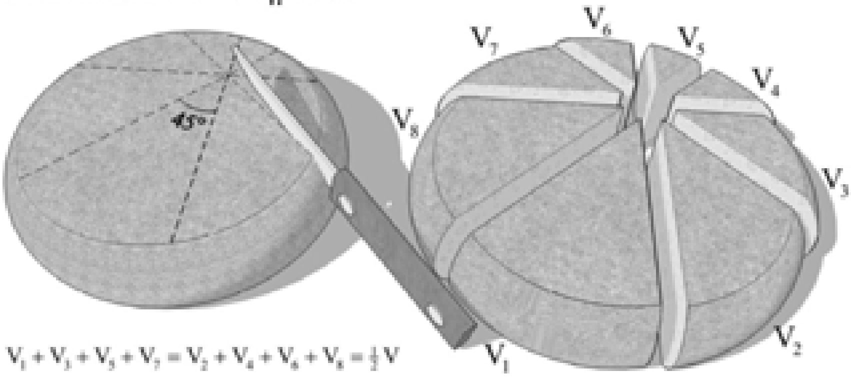
Παρατήρηση.Για τη διάμεσο ισχύει $(2\mu_a)^2=(b+c)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+(b-c)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

Απόδειξη. **ii)** Έστω M το μέσο της χορδής AB. Είναι γνωστό ότι η OM είναι μεσοκάθετος της AB (και περιέχεται στον άξονα συμμετρίας του σχήματος).





Τέλος, μια πρακτική εφαρμογή η οποία πηγάζει από το δεδομένο πρόβλημα είναι ότι: «για να μοιράσομε σε δύο ίσα μέρη ένα κεφάλι τυριού, από τα οκτώ τεμάχια που έχει διαιρεθεί (κατά τον τρόπο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) αρκεί να επιλέξομε τα τεμάχια V_1, V_3, V_5, V_7, τα οποία αποτελούν το ήμισυ».



$V_1 + V_3 + V_5 + V_7 = V_2 + V_4 + V_6 + V_8 = \frac{1}{2} V$

Είναι προφανές (από την ισότητα των κύκλων) ότι $GP = GQ$ και λόγω της αρχικής υπενθύμισης ισχύει $GP = \tau_{\triangle GBD} - BD$ και $GQ = \tau_{\triangle GAE} - AE$, άρα $\tau_{\triangle GBD} - BD = \tau_{\triangle GAE} - AE \overset{(2)}{\Rightarrow} BD = AE \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = b$. (3)

Τελικά από τις (1) και (3) συνάγεται ότι $a = b = c$.

Σχόλιο. Για τρεις ακόμη διαφορετικές λύσεις βλέπε: www.usamts.org, «USA Mathematical Talent Search», Year 16 — Academic Year 2004–2005, Round 4, problem 5/4/16.

Πρόβλημα 71. **i)** Αν $x_k \in \mathbb{R}_{(0,\pi/2)}$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x_k}} \le \frac{n}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}}.$$

ii) Αν $a, b, c \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$a\sqrt{7a^2+9b^2} + b\sqrt{7b^2+9c^2} + c\sqrt{7c^2+9a^2} \ge \frac{4}{3}(a+b+c)^2.$$

iii) Αν $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, να αποδείξετε ότι $a^4 + b^4 + c^2 \ge 2\sqrt{2}abc$.

Απόδειξη. **i)** Δεν είναι άγνωστο ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \cos x$ στο διάστημα $\mathbb{R}_{(0,\pi/2)}$ είναι κοίλη και επομένως με βάση την ανισότητα του ***Jensen*** ισχύει: $\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \le f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$, για κάθε $x_i \in \mathbb{R}_{(0,\pi/2)}$ με $i = 1, 2, \ldots, n$. Συνεπώς $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos x_k \le \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$. (1)

Επειδή για κάθε $x_k \in \mathbb{R}_{(0,\pi/2)}$ αληθεύει ότι:

$$1+\tan^2 x_k = \frac{1}{\cos^2 x_k} \Leftrightarrow \cos x_k = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x_k}},$$

τελικά, η ανισοτική σχέση (1) μεταλλάσσεται στην:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x_k}} \le \frac{n}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}}.$$

Απόδειξη. **ii)** Η ανισότητα των ***Cauchy–Schwarz–Buniakowski*** δίνει:

$$\left((\sqrt{7})^2 + (\sqrt{9})^2\right)\cdot\left((\sqrt{7}\,a)^2 + (\sqrt{9}\,b)^2\right) \overset{C.S.B.}{\ge} (\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\,a + \sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\,b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7+9)\cdot(7a^2+9b^2) \ge (7a+9b)^2 \Rightarrow \sqrt{7a^2+9b^2} \ge \frac{1}{4}(7a+9b),$$

και συνεπώς $\sum_{\circlearrowleft} a\sqrt{7a^2+9b^2} \ge \frac{1}{4}\sum_{\circlearrowleft} a(7a+9b)$.

Δι' αυτού του τρόπου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

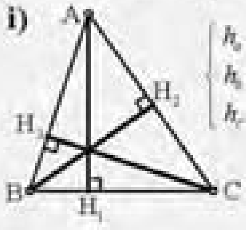
$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$
$\tan 4x = \dfrac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$
$\tan 5x = \dfrac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1-10\tan^2 x+5\tan^4 x}$
$\tan 6x = \dfrac{6\tan x - 20\tan^3 x + 6\tan^5 x}{1-15\tan^2 x+15\tan^4 x-\tan^6 x}$
$\tan 7x = \dfrac{7\tan x - 35\tan^3 x + 21\tan^5 x-\tan^7 x}{1-21\tan^2 x+35\tan^4 x-7\tan^6 x}$
$\tan 8x = \dfrac{8\tan x - 56\tan^3 x + 56\tan^5 x-8\tan^7 x}{1-28\tan^2 x+70\tan^4 x-28\tan^6 x+\tan^8 x}$
$\tan 9x = \dfrac{9\tan x - 84\tan^3 x + 126\tan^5 x-36\tan^7 x+\tan^9 x}{1-36\tan^2 x+126\tan^4 x-84\tan^6 x+9\tan^8 x}$
$\tan 10x = \dfrac{10\tan x - 120\tan^3 x + 252\tan^5 x-120\tan^7 x+10\tan^9 x}{1-45\tan^2 x+210\tan^4 x-210\tan^6 x+45\tan^8 x-\tan^{10} x}$
$\tan 11x = \dfrac{11\tan x - 165\tan^3 x + 462\tan^5 x-330\tan^7 x+55\tan^9 x-\tan^{11} x}{1-55\tan^2 x+330\tan^4 x-462\tan^6 x+165\tan^8 x-11\tan^{10} x}$

Βλέπε και: ***Eli Maor*** *«Trigonometric Delights», σελ. 155, Princeton University Press, 1998.*

Πρόβλημα 88. **i)** Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο από τα τρία ύψη του.

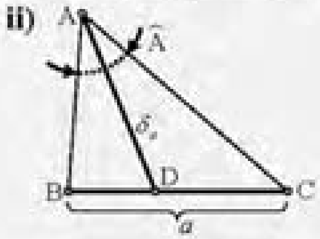
ii) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ABC από την πλευρά $BC = a$, τη γωνία A και την εσωτερική διχοτόμο $AD = \delta_a$ της γωνίας A.

i)



$$\left\{\begin{array}{l|l} h_a = AH_1 & a = BC \\ h_b = BH_2 & b = CA \\ h_c = CH_3 & c = AB \end{array}\right\}$$

ii)



Λύση. **i)** <u>*Ανάλυση.*</u> Υποθέτομε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο τρίγωνο και είναι το ABC. Από τον τύπο του εμβαδού του τριγώνου έχομε:

$$(ABC) = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2} \Rightarrow a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c \Rightarrow \frac{a}{1/h_a} = \frac{b}{1/h_b} = \frac{c}{1/h_c} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\ell^2/h_a} = \dfrac{b}{\ell^2/h_b} = \dfrac{c}{\ell^2/h_c}$, όπου $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ αυθαίρετη σταθερά που αναφέρεται σε μονάδα μήκους (όπως και τα a, b, c, h_a, h_b, h_c).

2) Δίνεται $\triangle ABC$ με $a = BC = 1+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$, $b = CA = 1$ και $c = AB = 2$. Θα αποδείξομε ότι οι εξωτερικές διχοτόμοι δ_b' και δ_c' είναι ίσες, παρ' όλο που το τρίγωνο $\triangle ABC$ δεν είναι ισοσκελές.

Πράγματι είναι $\delta_b'^2 = \delta_c'^2 \Leftarrow ca\left(\frac{b^2}{(c-a)^2}-1\right) = ab\left(\frac{c^2}{(a-b)^2}-1\right) \Leftarrow$

$$\Leftarrow 2a\left(\frac{1}{(2-a)^2}-1\right) = a\left(\frac{4}{(a-1)^2}-1\right) \Leftarrow \frac{2}{(2-a)^2}-2 = \frac{4}{(a-1)^2}-1 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{2}{(2-a)^2} = \frac{4+(a-1)^2}{(a-1)^2} \Leftarrow 2(a-1)^2 = 4(2-a)^2+(3a-2-a^2)^2 \Leftarrow$$

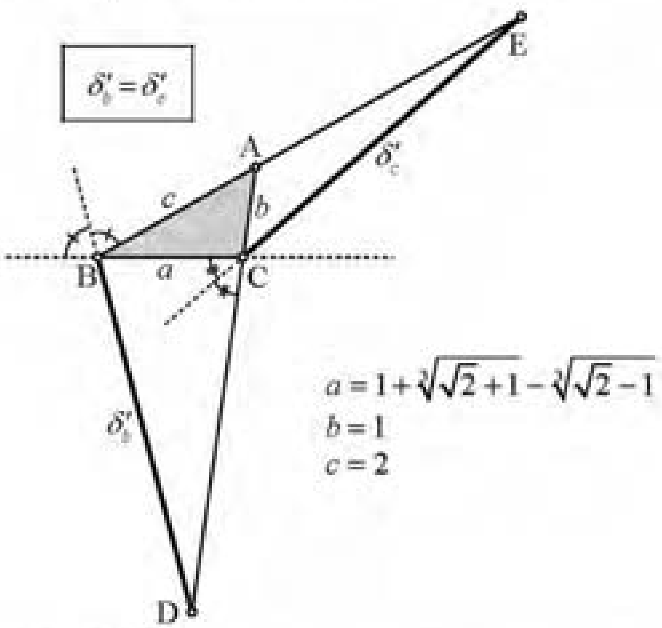
$$\Leftarrow 2a^2+2-4a = 16+4a^2-16a+(9a^2+4+a^4-12a-6a^3+4a^2) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow a^4-6a^3+15a^2-24a+18=0 \Leftarrow (a-3)(a^3-3a^2+6a-6)=0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow a^3-3a^2+6a-6=0 \Leftarrow \left|\begin{array}{l} u \equiv \sqrt[3]{\sqrt{2}+1},\ v \equiv \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \\ u^3-v^3=2,\ uv=1,\ a=1+u-v \end{array}\right| \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (1+u-v)^3-3(1+u-v)^2+6(1+u-v)-6=0 \Leftarrow$$

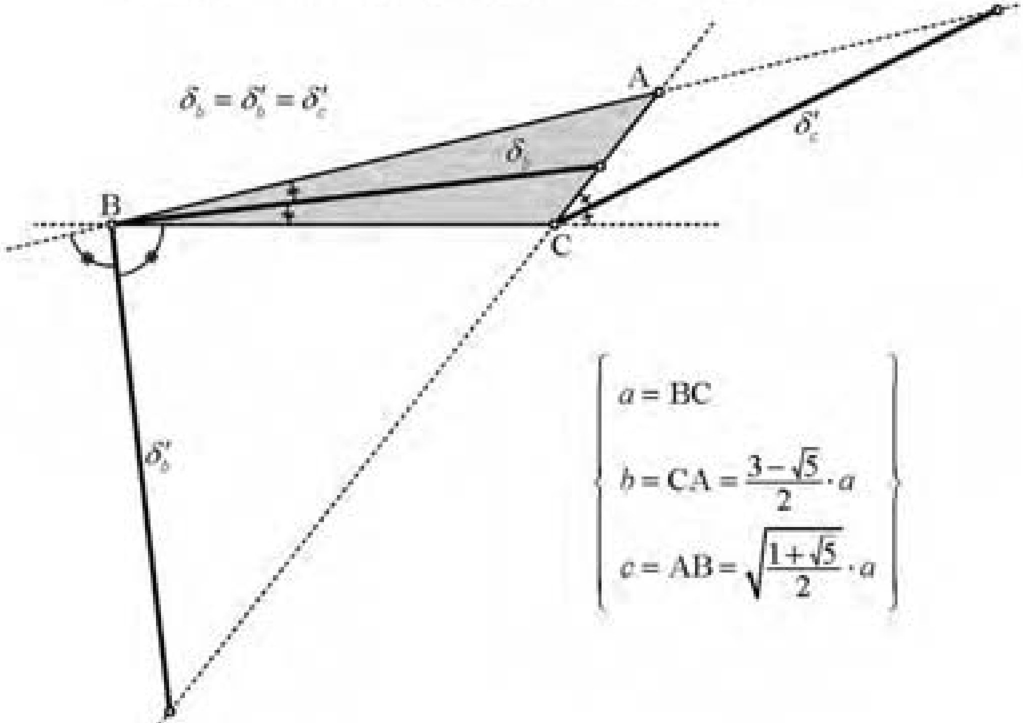
$$\Leftarrow (\underbrace{u^3-v^3}_{2})-3\underbrace{u\cdot v}_{1}(u-v)+3(u-v)-2=0 \Leftarrow 0=0, \text{ που αληθεύει.}$$



Με άλλα λόγια η πρόταση:

{ $\delta_b' = \delta_c'$ } $\Leftrightarrow$ { $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές}, είναι ψευδής.

Ωστόσο, για ένα τρίγωνο με δεδομένη πλευρά $a = BC$, θα ήταν σημαντικό να έχομε μια εικόνα των χωρίων του επιπέδου του τριγώνου, Κάθε τρίγωνο ABC με $(\,BC, CA, AB\,) = \left(a, \frac{3-\sqrt{5}}{2}a, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}a\right)$, έχει την ιδιότητα $\delta_b = \delta'_b = \delta'_c$, για κάθε $a \in \mathbb{R}_{>0}$.



Επισήμανση. *Αυτά που οι μαθηματικοί βάζουν στη βιτρίνα, είναι μικροπράγματα, σε σύγκριση με αυτά που διαθέτει το κελάρι τους.*

Πρόβλημα 89. **i)** Αν το $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, να αποδείξετε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n$.

ii) Αν $m, n \in \mathbb{N}_{\neq 0} \wedge m > n$, να αποδείξετε ότι $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και στη συνέχεια, ότι $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Απόδειξη. **i)** Αρκεί να αποδείξομε ότι: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n \Leftarrow$

$$\Leftarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) < \underbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{=1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \Leftarrow$$

$$\Leftarrow 1+\frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \Leftarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} < 1+\frac{1}{n^2}$$, που αληθεύει για κάθε

$$\sqrt{2\cdot 2016+8^2} < a_{2016} < \frac{1}{2\cdot 8}+\sqrt{2\cdot 2016+8^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4096} < a_{2016} < 0.0625+\sqrt{4096} \Leftrightarrow 64 < a_{2016} < 64.0625 .$$

Εφαρμογή-3: Η ανισότητα (A) για $a_0 = 50$ και $n = 100000$ γίνεται:

$$\sqrt{2\cdot 100000+50^2} < a_{100000} < \frac{1}{2\cdot 50}+\sqrt{2\cdot 100000+50^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{202500} < a_{100000} < 0.01+\sqrt{202500} \Leftrightarrow 450 < a_{100000} < 450.01 .$$

Εφαρμογή-4: Η ανισότητα (A) για $a_0 = 5$ και $n = 1000$ γίνεται:

$$\sqrt{2\cdot 1000+5^2} < a_{1000} < \frac{1}{2\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 1000+5^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2025} < a_{1000} < 0.1+\sqrt{2025} \Leftrightarrow 45 < a_{1000} < 45.1$, το ζητούμενο.

Πρόβλημα 108. Χωρίς να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων, να αποδείξετε ότι $\sec^2\frac{\pi}{9}+\sec^2\frac{3\pi}{9}+\sec^2\frac{5\pi}{9}+\sec^2\frac{7\pi}{9}=40$.

Απόδειξη. Από τη γνωστή ταυτότητα $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ και με $\tan^2 60° = 3$, η προς απόδειξη: $\sec^2 20°+\sec^2 60°+\sec^2 100°+\sec^2 140° = 40$, γίνεται $1+\tan^2 20°+1+3+1+\tan^2 100°+1+\tan^2 140° = 40$.

Επομένως, αρκεί $\tan^2 20°+\tan^2 100°+\tan^2 140° = 33 \Leftarrow$

$$\Leftarrow \tan^2 20°+\tan^2 80°+\tan^2 40° = 33 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \tan^2 20°+\tan^2(60°+20°)+\tan^2(60°-20°) = 33 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \tan^2 20°+\left(\frac{\tan 60°+\tan 20°}{1-\tan 60°\cdot\tan 20°}\right)^2+\left(\frac{\tan 60°-\tan 20°}{1+\tan 60°\cdot\tan 20°}\right)^2 = 33 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \tan^2 20°+\left(\frac{\sqrt{3}+\tan 20°}{1-\sqrt{3}\tan 20°}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-\tan 20°}{1+\sqrt{3}\tan 20°}\right)^2 = 33 \overset{x=\tan 20°}{\Leftarrow}$$

$$\overset{x=\tan 20°}{\Leftarrow} x^2+\frac{(\sqrt{3}+x)^2}{(1-\sqrt{3}x)^2}+\frac{(\sqrt{3}-x)^2}{(1+\sqrt{3}x)^2} = 33 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{\overbrace{x^2(1-3x^2)^2}^{\mathcal{A}}+\overbrace{(\sqrt{3}+x)^2(1+\sqrt{3}x)^2}^{\mathcal{B}}+\overbrace{(\sqrt{3}-x)^2(1-\sqrt{3}x)^2}^{\mathcal{C}}}{(1-3x^2)^2} = 33 \qquad (1)$$

Είναι $\mathcal{A} = x^2(1-3x^2)^2 = x^2(1+9x^4-6x^2) = 9x^6-6x^4+x^2$, (2)

$\mathcal{B} = (\sqrt{3}+x)^2(1+\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{3}+3x+x+\sqrt{3}x^2)^2 = \left(\sqrt{3}(x^2+1)+4x\right)^2$. (3)

$\mathcal{C} = (\sqrt{3}-x)^2(1-\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{3}-3x-x+\sqrt{3}x^2)^2 = \left(\sqrt{3}(x^2+1)-4x\right)^2$. (4)

Απόδειξη. **i)** Είναι $3x^4-x^2-2x+4=(2x^4+2)+(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)=$

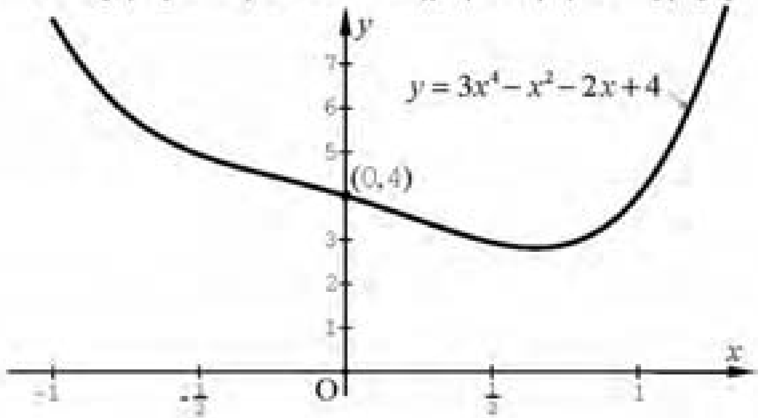
$$=\underbrace{2(x^4+1)}_{>0}+\underbrace{(x^2-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}>0 \Rightarrow 3x^4-x^2-2x+4>0,$$

που σημαίνει ότι η δεδομένη εξίσωση στερείται πραγματικών ριζών.

Αλλιώς. **i)** Ισχύει ότι $3x^4-x^2-2x+4=(2x^4-4x^2+2)+x^4+3x^2-2x+2=$

$$=\underbrace{\underbrace{2(x^4-2x^2+1)}_{=2(x^2-1)^2}}_{\geq 0}+\underbrace{\underbrace{(x^4+2x^2+1)}_{=(x^2+1)^2}}_{>0}+\underbrace{\underbrace{(x^2-2x+1)}_{=(x-1)^2}}_{\geq 0}>0,$$

και συνεπώς η εξίσωση δύναται να έχει μόνο μιγαδικές ρίζες.



Αλλιώς. **i)** Πολλαπλασιάζομε επί δύο, και διαδοχικά έχομε ότι:

$6x^4-2x^2-4x+8 \;\geq\; 3x^4-2x^2-4x+8=$

$=3x^4+(6x^3-6x^3)+(6x^2-12x^2+4x^2)+(8x-12x)+8=$

$=(3x^4+6x^3+6x^2)-(6x^3+12x^2+12x)+(4x^2+8x+8)=$

$=3x^2(x^2+2x+2)-6x(x^2+2x+2)+4(x^2+2x+2)=$

$=(x^2+2x+2)(3x^2-6x+4)=\underbrace{\left(1+(x+1)^2\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\left(1+3(x-1)^2\right)}_{>0}>0.$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση στερείται πραγματικών ριζών.

Απόδειξη. **ii)** Ισοδύναμα έχομε : $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}+4\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+4\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}+\underbrace{2}_{>0}=0$, που είναι άτοπο, και

επομένως η εξίσωση στερείται πραγματικών ριζών.

Αλλιώς. **ii)** Η εξίσωση $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$, ισοδύναμα γράφεται:

$$\Rightarrow (a+c)-ac(a+c)+(ac)^2-1>0 \Rightarrow (1-ac)(a+c-1-ac)>0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-ac)\underbrace{(1-a)}_{>0}\underbrace{(c-1)}_{>0}>0 \Rightarrow 1>ac \Rightarrow b>abc>1 \Rightarrow \underline{b>1}, \text{ άτοπο.}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνομε ότι $a<1<b\le c$, αν οι αριθμοί θεωρηθούν με αύξουσα διάταξη. Γενικότερα, χωρίς διάταξη ισχύει ότι, ακριβώς ένας από τους a,b,c είναι μικρότερος της μονάδας.

Συμπέρασμα. Αν οι $a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}$ πληρούν την $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}>abc>1$, ισχύει ότι:
$$\min\{a,b,c\}<1<a+b+c-(\min\{a,b,c\}+\max\{a,b,c\})\le\max\{a,b,c\}.$$

Πρόβλημα 131. i) Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $x^4-4x^3-49x^2+28x+72=0$,

ii) Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$,

iii) Να επιλυθεί στο $\mathbb{C}$, η εξίσωση $x^4+16x-12=0$,

iv) Να επιλυθεί στο $\mathbb{Q}$, η $14x^2+4y^2+9z^2-4x(3y+3z+1)+4=0$,

v) Να επιλυθεί στο $\mathbb{Q}$, η εξίσωση $\underbrace{2x99561}_{7-\text{ψήφιος αριθμός}}=(3(623+x))^2$,

όπου x στο πρώτο και δεύτερο μέλος εκφράζει ψηφίο του επταψήφιου αριθμού, στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

vi) Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}$, η $x^9-2x^7-5x^6+7x^4-2x^3+4x^2-15x+17=0$.

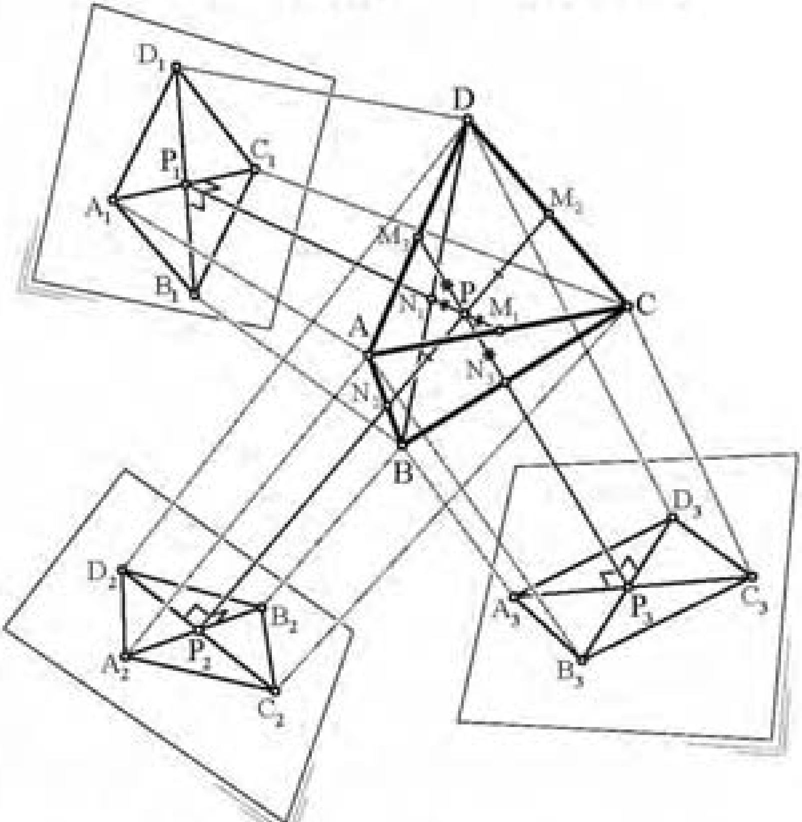
vii) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες (αν υπάρχουν) της εξίσωσης $x^6-x^5+2x^4-2x^3+x^2-12x+4=0$, δεν είναι αρνητικές.

viii) Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}_{<0}$, η εξίσωση $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$.

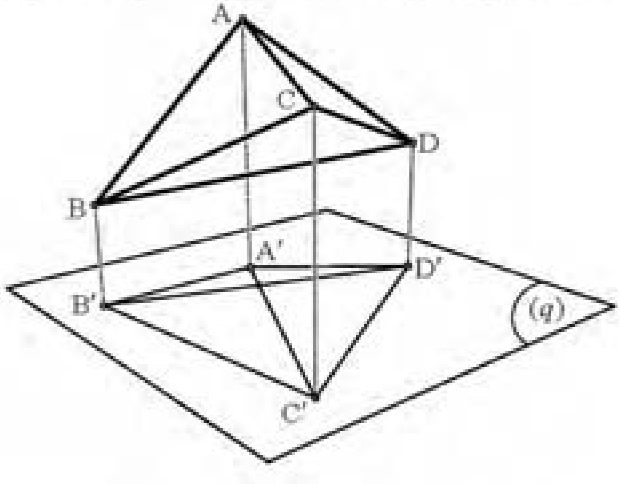
Λύση. i) Ισοδύναμα έχομε $x^4-4x^3-49x^2+28x+72=0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow x^4-8x^3+4x^3-9x^2-32x^2-8x^2-36x+64x+72=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^4-8x^3-9x^2)+(4x^3-32x^2-36x)-(8x^2-64x-72)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2-8x-9)+4x(x^2-8x-9)-8(x^2-8x-9)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-8x-9)(x^2+4x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1=9 & x_3=-2+2\sqrt{3} \\ x_2=-1 & x_4=-2-2\sqrt{3} \end{Bmatrix}.$$

Αλλιώς. Με βάση τη γενική επίλυση εξισώσεων $4^{ου}$ βαθμού (*βλέπε «ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» τόμος ΙΙ, σελίδα 767*), ισχύει ότι:
$$x^4-4x^3-49x^2+28x+72=\left(x^2-2x-\frac{17}{2}\right)^2-\left(6x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x-\frac{17}{2}+6x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x-\frac{17}{2}-6x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

Επειδή κάθε τετράεδρο έχει τρείς διαμέσους, θα έχομε τελικά τρείς απειρίες λύσεων (υπό την έννοια παραλλήλων επιπέδων), λύσεων, οι οποίες προοπτικά οπτικοποιούνται στο παρακάτω σχήμα.



Απόδειξη. **c)** Έστω ότι τα A', B', C', D' είναι οι ορθές προβολές των κορυφών A, B, C, D του τετραέδρου $ABCD$, σε επίπεδο (q) παράλληλο προς τις ασύμβατες ευθείες που ορίζονται από τις ακμές AC, BD.



$$-5(r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_4r_5)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 2(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+r_5^2)-(r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_4r_5)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+r_5^2)+(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+r_5^2)-$$
$$-2(r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_4r_5)<0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+r_5^2)+(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)^2<0$, που είναι άτοπο. Επομένως δεν είναι δυνατόν να είναι όλες οι ρίζες της δεδομένης εξίσωσης πραγματικές.

Πρόβλημα 149. **i)** Αν $a^2+b^2=25$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)^2=125.$$

ii) Αν $a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}$, να αποδείξετε ότι:

$$A=\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\cdot(a+b+c)\geq 100.$$

Απόδειξη. **i)** Από την ταυτότητα του ***Lagrange***,

$$(xy+zt)^2+(xt-yz)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2),$$

για $x=a$, $y=\sqrt{3}$, $z=b$, $t=\sqrt{2}$, συνάγεται ότι:

$$(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})^2+(a\sqrt{2}-b\sqrt{3})^2=(a^2+b^2)\left((\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right)=5\cdot 25=125.$$

Αλλιώς. **i)** $\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)^2=125\Leftarrow 3a^2+2b^2\underline{+2ab\sqrt{6}}+2a^2+$ $+3b^2\underline{-2ab\sqrt{6}}=125\Leftarrow 5a^2+5b^2=125\Leftarrow a^2+b^2=25$, που αληθεύει.

Γενίκευση. **i)** Αν $k,\ell\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ και $a^2+b^2=(k+\ell)^2\Rightarrow a^2(k+\ell)+b^2(k+\ell)=(k+\ell)^3\Rightarrow$

$$\Rightarrow(a\sqrt{k})^2+(b\sqrt{\ell})^2+(a\sqrt{\ell})^2+(b\sqrt{k})^2=(k+\ell)^3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(a\sqrt{k})^2+(b\sqrt{\ell})^2+2ab\sqrt{k\ell}+(a\sqrt{\ell})^2+(b\sqrt{k})^2-2ab\sqrt{k\ell}=(k+\ell)^3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(a\sqrt{k}+b\sqrt{\ell})^2+(a\sqrt{\ell}-b\sqrt{k})^2=(k+\ell)^3.$$

Συμπέρασμα: Αν $k,\ell\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ και $a^2+b^2=(k+\ell)^2$, ισχύει ότι:

$$(a\sqrt{k}+b\sqrt{\ell})^2+(a\sqrt{\ell}-b\sqrt{k})^2=(k+\ell)^3.$$

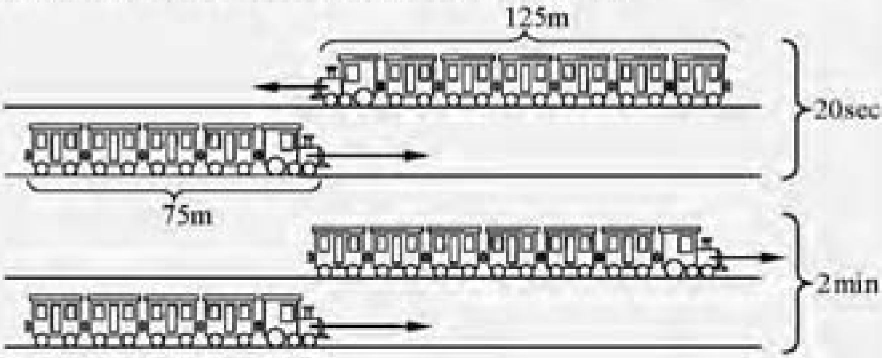
Εφαρμογές. Για $(k,\ell)=(2,3)$: $a^2+b^2=5^2\Rightarrow(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^2+(a\sqrt{3}-b\sqrt{2})^2=5^3$.

Για $(k,\ell)=(3,5)$: $a^2+b^2=8^2\Rightarrow(a\sqrt{3}+b\sqrt{5})^2+(a\sqrt{5}-b\sqrt{3})^2=8^3$.

Για $(k,\ell)=(5,7)$: $a^2+b^2=12^2\Rightarrow(a\sqrt{5}+b\sqrt{7})^2+(a\sqrt{7}-b\sqrt{5})^2=12^3$.

Συνεπώς, ισχύει: $\left\{\begin{matrix} \ln\left(64\sqrt[24]{a^{x^2-40x}}\right)=0 \\ \wedge \\ a\in\left(\mathbb{R}_{(0,1)}\cup\mathbb{R}_{(1,2^{1/25})}\right) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=20\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\ln_a 2}\right) \\ \vee \\ x=20\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\ln_a 2}\right) \end{matrix}\right\}.$

Πρόβλημα 161. **i)** Δύο τρένα έχουν μήκη 75m και 125m και κινούνται με σταθερές ταχύτητες σε παράλληλες γραμμές. Όταν συναντηθούν κινούμενα αντίθετα χρειάζονται 20sec για να αντιπαρέλθει το ένα το άλλο, όταν όμως κινούνται κατά την ίδια φορά, το ταχύτερο, που είναι αυτό που έχει το μικρότερο μήκος, χρειάζεται 2min για να προσπεράσει το βραδύτερο. Να βρείτε τις ταχύτητες των τρένων.



ii) Αν από μια ομάδα αγοριών και κοριτσιών φύγουν 15 κορίτσια, τότε σε κάθε κορίτσι αντιστοιχούν δύο αγόρια. Αν στη συνέχεια φύγουν 45 αγόρια, τότε σε κάθε αγόρι αντιστοιχούν 5 κορίτσια. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια υπήρχαν αρχικά στην ομάδα;

iii) Αν σου δώσω εγώ 10 €, θα έχομε τα ίδια χρήματα στην τσέπη μας. Αν μου δώσεις εσύ 10 €, θα έχω τα διπλάσια από εσένα. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας μας στην τσέπη του;

Λύση. **i)** Αν η ταχύτητα του τρένου με το μικρότερο μήκος είναι x, ενώ του τρένου με το μεγαλύτερο μήκος είναι y, στην περίπτωση που κινούνται αντίθετα, σε 20 sec διανύουν:

Το μεν πρώτο $\dfrac{20x}{3600}=\dfrac{x}{180}$ m, το δε δεύτερο $\dfrac{20y}{3600}=\dfrac{y}{180}$ m, και άρα προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{x}{180}+\dfrac{y}{180}=200\ \text{m} \Leftrightarrow x+y=36000\ \text{m}.$ (1)

Στην περίπτωση που κινούνται κατά την αυτή διεύθυνση, σε 2min, το πρώτο διανύει διάστημα $\dfrac{2x}{60}=\dfrac{x}{30}$ m, ενώ το δεύτερο διάστημα

Πρόβλημα 162. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

i) $\mathcal{A}=\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$,

ii) $\mathcal{B}=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$,

iii) $\mathcal{C}=\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{\ldots}}}}}}}$,

iv) $\mathcal{D}=\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}$,

v) $\mathcal{E}=\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\ldots}}}}}}}$,

vi) $\mathcal{F}=\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{\ldots}}}}}}}$.

vii) $\mathcal{U}=\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}}}}}$.

Λύση. **i)** Επειδή, $54+30\sqrt{3}=27+3\sqrt{3}+27\sqrt{3}+27=3^3+(\sqrt{3})^3+3\cdot\sqrt{3}\cdot 3^2+$
$+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 3=(3+\sqrt{3})^3 \Rightarrow 54+30\sqrt{3}=(3+\sqrt{3})^3$, (1)

και $54-30\sqrt{3}=27-3\sqrt{3}-27\sqrt{3}+27=3^3-(\sqrt{3})^3-3\cdot\sqrt{3}\cdot 3^2+$
$+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 3=(3-\sqrt{3})^3 \Rightarrow 54-30\sqrt{3}=(3-\sqrt{3})^3$, (2)

συνάγεται ότι: $\mathcal{A}=\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\overset{(1),(2)}{=}$

$$=\sqrt[3]{(3+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{3})^3}=(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=6.$$

Λύση. **ii)** Έχομε ότι $\mathcal{B}=\sqrt[4]{9+8+2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}}+\sqrt[4]{9+8-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}}=$

$$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{9}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2+2\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{9}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2-2\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}+\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}.$$

Λύση. **iii)** Ισχύει ότι: $\left\{\mathcal{C}=\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{\ldots}}}}}\ \wedge\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}_{>0}\right\}\Leftrightarrow$

Επιπλέον $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\left|\begin{pmatrix} x=\frac{1}{z} \\ dx=-\frac{dz}{z^2}\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{array}{c|c|c} x & 0 & +\infty \\ \hline z & +\infty & 0\end{array}\right)\right|=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{z^4+1}{z^4}}=$

$=\int_0^{+\infty}\frac{z^2dz}{z^4+1}\overset{z\to x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+1}$, επομένως παίρνομε το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}. \quad (4)$$

• Για $a=0$, είναι $J\overset{(3)}{=}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+2x+1}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{4}}$. (5)

• Για $a=\frac{\pi}{6}$, προκύπτει ότι $\boxed{J\overset{(3)}{=}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$. (6)

• Για $a=\frac{\pi}{3}$, έχομε ότι $\boxed{J\overset{(3)}{=}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4-x^2+1}=\frac{\pi}{2}}$. (7)

• Με πρόσθεση έπεται: $\left\{\begin{array}{l}(7):\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4-x^2+1}=\frac{\pi}{2} \\ (6):\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=$

$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^4+x^2+1+x^4-x^2+1}{(x^4+1)^2-x^4}dx=$

$=2\int_0^{+\infty}\frac{2(x^4+1)}{x^8+2x^4+1-x^4}dx\Rightarrow\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^8+x^4+1}dx=\frac{3+\sqrt{3}}{12}\pi}$. (8)

• Με αφαίρεση προκύπτει: $\left\{\begin{array}{l}(7):\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4-x^2+1}=\frac{\pi}{2} \\ (6):\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\end{array}\right\}\overset{(-)}{\Rightarrow}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=$

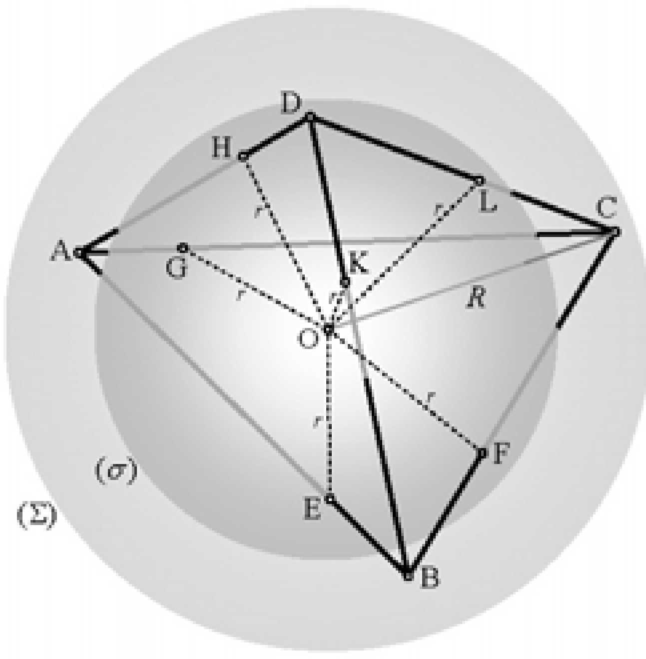
$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^4+x^2+1-(x^4-x^2+1)}{(x^4+1)^2-x^4}dx=$

$=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^8+2x^4+1-x^4}dx\Rightarrow\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^8+x^4+1}dx=\frac{3-\sqrt{3}}{12}\pi}$. (9)

Επαλήθευση. Με $f : f(t) = at + t^2$, ή $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, γίνεται $a(x+y) + (x+y)^2 = ax + x^2 + ay + y^2 + 2xy$, η οποία αληθεύει, διότι $ax + ay + x^2 + y^2 + 2xy = ax + x^2 + ay + y^2 + 2xy$.

Απόδειξη. **ii)** Θεωρούμε τη σφαίρα (Σ), κέντρου O και ακτίνας R, που περιέχει τις κορυφές του τετραέδρου ABCD (τέσσαρα σημεία ορίζουν μία σφαίρα). Δηλαδή ισχύει $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = R$. Δίνεται ότι ισχύει $\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB} = \mathrm{BF}\cdot\mathrm{FC} = \mathrm{CG}\cdot\mathrm{GA} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HA} = \mathrm{DK}\cdot\mathrm{KB} = \mathrm{DL}\cdot\mathrm{LC}$. (1) Είναι προφανές ότι επειδή τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in (\Sigma)$, τα ίσα μεταξύ τους γινόμενα $\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB}$, $\mathrm{BF}\cdot\mathrm{FC}$, $\mathrm{CG}\cdot\mathrm{GA}$, $\mathrm{DH}\cdot\mathrm{HA}$, $\mathrm{DK}\cdot\mathrm{KB}$, $\mathrm{DL}\cdot\mathrm{LC}$, θα είναι αντίστοιχα ίσα με τις δυνάμεις των σημείων $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{K}, \mathrm{L}$ ως προς τη σφαίρα (Σ). Επομένως ισχύει:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB} = R^2 - \mathrm{OE}^2 \\ \mathrm{BF}\cdot\mathrm{FC} = R^2 - \mathrm{OF}^2 \\ \mathrm{CG}\cdot\mathrm{GA} = R^2 - \mathrm{OG}^2 \\ \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HA} = R^2 - \mathrm{OH}^2 \\ \mathrm{DK}\cdot\mathrm{KB} = R^2 - \mathrm{OK}^2 \\ \mathrm{DL}\cdot\mathrm{LC} = R^2 - \mathrm{OL}^2 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} R^2 - \mathrm{OE}^2 = R^2 - \mathrm{OF}^2 = R^2 - \mathrm{OG}^2 = \\ = R^2 - \mathrm{OH}^2 = R^2 - \mathrm{OK}^2 = R^2 - \mathrm{OL}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathrm{OE} = \mathrm{OF} = \mathrm{OG} = \mathrm{OH} = \mathrm{OK} = \mathrm{OL} = r. \end{array}$$



Συνεπώς τα $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{K}, \mathrm{L}$ απέχουν από το O απόσταση r και ως εκ τούτου ανήκουν σε σφαιρική επιφάνεια (σ), ομόκεντρη της (Σ).

Πρόβλημα 190. **i)** Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $[\ln x]! = \frac{5}{2}(x+3)$.

Υπενθύμιση. $[x] \equiv \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ *και* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *με* $0! \equiv 1$.

ii) Στον παρακάτω πολλαπλασιασμό, κάθε γράμμα και κάθε αστέρι παριστάνουν ψηφία από το 0 μέχρι το 9 ($Α \neq 0$).

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & & Α & Τ & Ο & Μ \\
 & & & & \times & Α & Τ & Ο & Μ \\
\hline
 & & & & \star & \star & \star & \star & \star \\
 & & & \star & \star & \star & \star & \star & \\
 & & \star & \star & \star & \star & \star & & \\
+ & \star & \star & \star & \star & \star & & & \\
\hline
 & \star & \star & \star & \star & Α & Τ & Ο & Μ
\end{array}$$

Τα διάφορα γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία. Να αντικαταστήσετε τα γράμματα και τα αστέρια με ψηφία, εις τρόπον, ώστε ο παραπάνω πολλαπλασιασμός να είναι σωστός.

iii) Να βρείτε τους μονοψήφιους πρώτους αριθμούς, που αντιστοιχούν στα γράμματα Α, Ε, Μ, Ν, Ρ, Τ της παρακάτω πρόσθεσης:

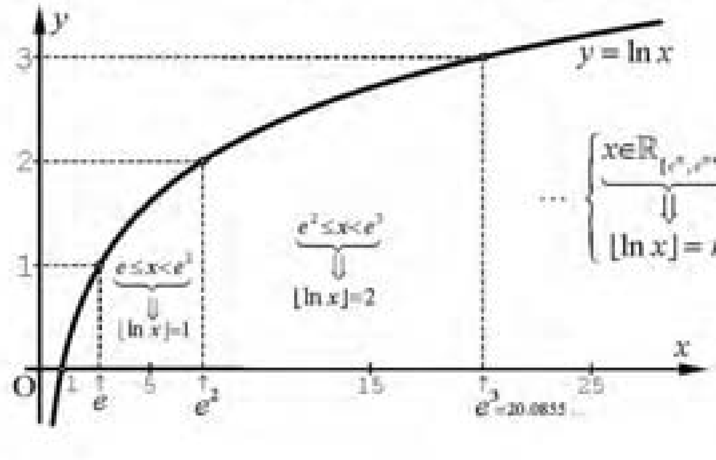
$$\begin{array}{rrrr}
 & Μ & Α & Ρ \\
+ & Μ & Ε & Τ \\
\hline
 & Ε & Ν & Α
\end{array}$$

εις τρόπον, ώστε το $(\text{ΜΑΡ})^2 + (\text{ΜΕΤ})^2$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση. **i)** Έχομε $\underbrace{\lfloor \ln x \rfloor !}_{\in \mathbb{N}} = 5 \cdot \frac{x+3}{2} \overset{m \in \mathbb{N}}{=} 5 \cdot m \Rightarrow x+3 = 2m \Rightarrow x = 2m-3$. (1)

Αν τεθεί $\lfloor \ln x \rfloor \equiv n \in \mathbb{N}$, επειδή $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}_{5! = \text{πολ}5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n = \text{πολ}5$,

συμπεραίνομε ότι ο αριθμός $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ και $x = 2\frac{n!}{5} - 3 \in \mathbb{N}_{\geq 45}$. (2)



Πρόβλημα 191. **i)** Αν $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$, να υπολογίσετε το $J=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{1+b^x}dx$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αληθεύει ότι:

$$\int_a^b\big(f(x)-3x\big)\,dx=a^2-b^2 \text{ με } a,b\in\mathbb{R}\wedge a<b,$$

είναι δυνατό να υπολογίσετε την τιμή $f(\pi)$;

Απόδειξη. **i)** Διαδοχικά, ισχύει ότι $\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{1+b^x}dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+b^x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx=$

$$=\left[\frac{1}{1+b^x}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}\frac{x^3}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+b^x}\right)'dx=\left(\frac{1}{1+b^a}\cdot\frac{a^3}{3}-\frac{1}{1+b^{-a}}\cdot\frac{(-a)^3}{3}\right)-$$

$$-\int_{-a}^{a}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{-(1+b^x)'}{(1+b^x)^2}dx=\left(\frac{1}{1+b^a}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{b^a}{1+b^a}\cdot\frac{a^3}{3}\right)+\int_{-a}^{a}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{b^x\ln b}{(1+b^x)^2}dx=$$

$$=\frac{1+b^a}{1+b^a}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{\ln b}{3}\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{b^xx^3}{(1+b^x)^2}dx}_{=G}\Rightarrow J=\frac{a^3}{3}+\frac{\ln b}{3}\cdot G, \qquad (1)$$

Το $G=\int_{-a}^{a}\frac{b^xx^3dx}{(1+b^x)^2}=\left|\begin{pmatrix}x=-t\\dx=-dt\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{array}{c|c|c}x&-a&a\\t&a&-a\end{array}\right)\right|=-\int_{a}^{-a}\frac{b^{-t}(-t)^3dt}{(1+b^{-t})^2}=$

$$=\int_{a}^{-a}\frac{t^3dt}{b^t\cdot\frac{(1+b^t)^2}{b^{2t}}}=-\int_{-a}^{a}\frac{b^tt^3dt}{(1+b^t)^2}=-\int_{-a}^{a}\frac{b^xx^3dx}{(1+b^x)^2}=-G\Rightarrow 2G=0. \qquad (2)$$

Τελικά, από (1) και (2) συνάγεται ότι $J=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{1+b^x}dx=\frac{a^3}{3}$.

Εφαρμογές. $\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{1+5^x}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{1+13^x}dx=\frac{8}{3}$, $\int_{-3}^{3}\frac{x^2}{1+3^x}dx=\int_{-3}^{3}\frac{x^2}{1+100^x}dx=\frac{3^3}{3}=9$.

Παρατηρήσεις. **1)** *Για την ολοκληρωτέα συνάρτηση* $f(x)\equiv\frac{b^xx^3}{(1+b^x)^2}$ *του* G, *ισχύει ότι:*

$$f(-x)=\frac{b^{-x}(-x)^3}{(1+b^{-x})^2}=-\frac{b^{-x}x^3}{b^{-2x}(1+b^x)^2}=-\frac{b^xx^3}{(1+b^x)^2}=-f(x),$$

δηλαδή $f(-x)=-f(x)$ *και επομένως η* f *είναι περιττή στο* $\mathbb{R}$. *Αυτό εξηγεί με άλλα λόγια το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα* $G=\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$.

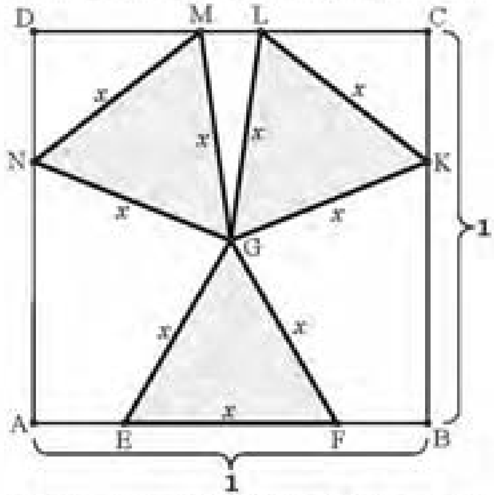
2) *Αν θεωρήσομε τη συνάρτηση* f *με τύπο* $f(x,b)=\frac{b^xx^3}{(1+b^x)^2}$ *ισχύει ότι:*

$$f\left(x,\frac{1}{b}\right)=\frac{b^{-x}x^3}{(1+b^{-x})^2}=\frac{b^xx^3}{(1+b^x)^2}=f(x,b)\Rightarrow f\left(x,\frac{1}{b}\right)=f(x,b).$$

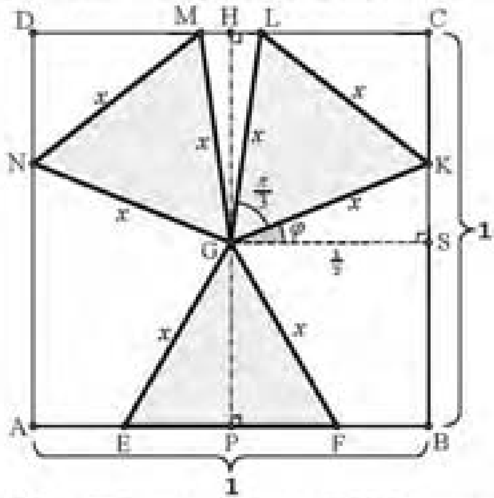
Ένα τετράγωνο και τρία ισόπλευρα τρίγωνα

Πρόβλημα: Σε τετράγωνο ABCD πλευράς **1**, εμπεριέχονται τρία ίσα ισόπλευρα τρίγωνα $\triangle GEF$, $\triangle GKL$ και $\triangle GMN$, κατά την διάταξη που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

Να υπολογίσετε την πλευρά x των ισοπλεύρων αυτών τριγώνων.



Λύση. Από το σημείο G φέρομε την κάθετη ευθεία στις πλευρές AB, CD του τετραγώνου, και έτσι ορίζομε τα σημεία H, P. Επιπλέον, από το σημείο G φέρομε την κάθετη GS προς την πλευρά BC.



Επειδή ισχύει $GL = GM$, το τρίγωνο $\triangle GLM$ είναι ισοσκελές.

Προφανώς $\measuredangle HGL = \measuredangle HGM$ και δεδομένου ότι τα τρίγωνα $\triangle GKL$, $\triangle GMN$, $\triangle GEF$ είναι ίσα και ισόπλευρα, συμπεραίνομε ότι η ευθεία που περιέχει τα σημεία P, G, H είναι και άξονας συμμετρίας του δεδομένου σχήματος. Συνεπώς, ισχύει ότι $GS = \frac{1}{2}$. (1)

Ένα πρόβλημα, γύρω από τα «Ουσιώδη Μαθηματικά»

Διατύπωση: Σε ένα τετραγωνικό ράφι ΑΒΓΗ μιας βιβλιοθήκης, βρίσκονται τοποθετημένα, τα τρία των αυτών διαστάσεων βιβλία, των «Ουσιωδών Μαθηματικών», όπως παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Αν θεωρήσομε ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{AH} = 1$, να αποδείξετε ότι το πάχος x των βιβλίων, ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 0$, όπου:

$$f(x) \equiv x^7 - x^6 - 9x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 7x + 1 .$$

Στη συνέχεια, αφού αποδείξετε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}_{(0,3)}$, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση το x και τη γωνία φ.