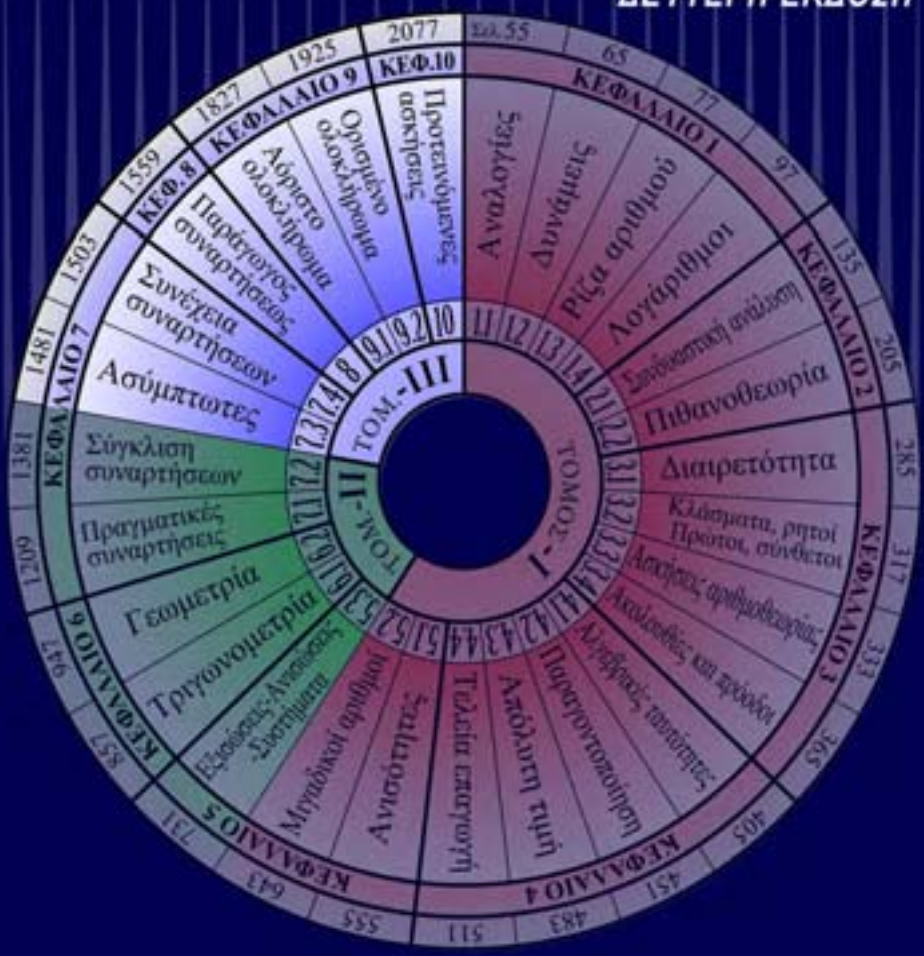
ΤΟΜΟΣ III

ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

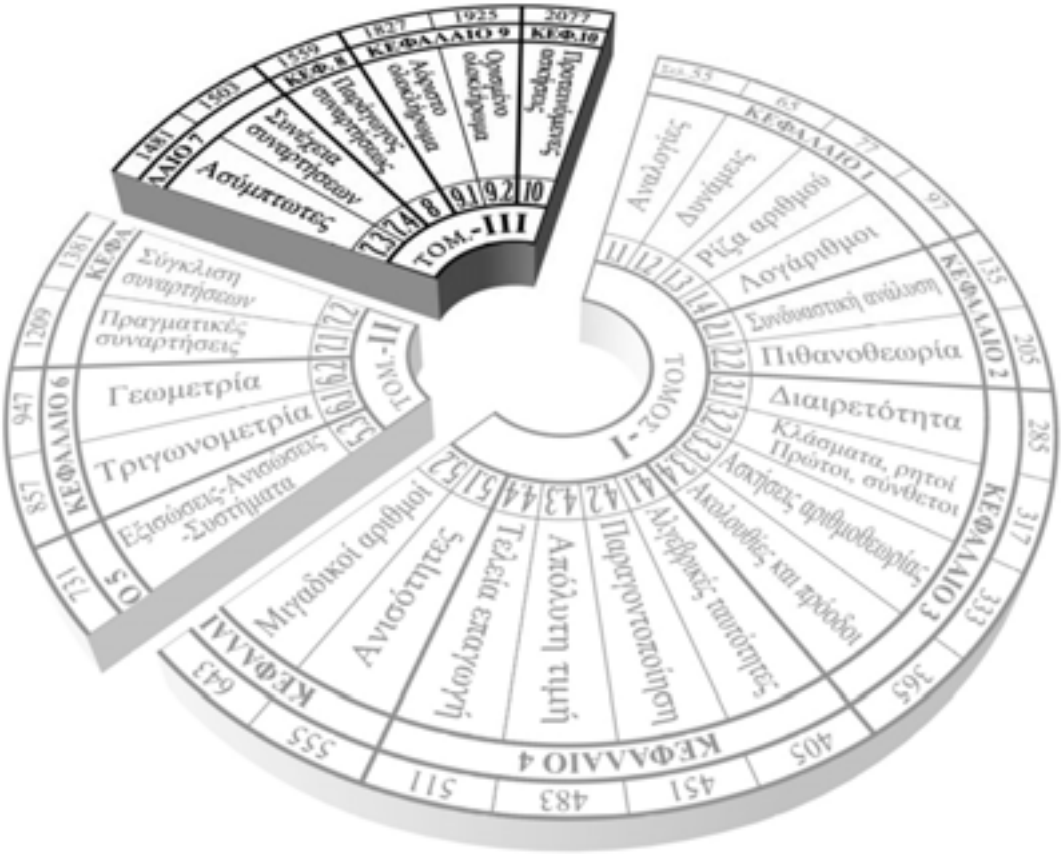
ΜΑΝΟΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

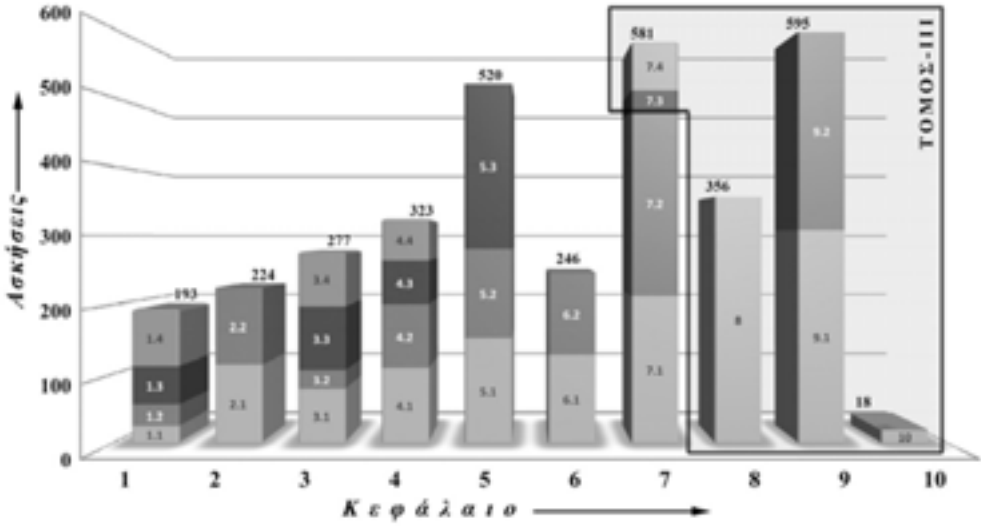


ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΤΟΜΟΥ



Κατανομή των 3333 τουλάχιστον, υποδειγματικώς λυμένων ασκήσεων:



ΤΟΜΟΣ-ΙΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ *(συνέχεια από τον τόμο-ΙΙ)*

Σελίδα

7.3 Ασύμπτωτες του διαγράμματος μιας συναρτήσεως 1481

7.3.1 Ορισμοί, παρατηρήσεις και παραδείγματα 1481

7.3.2 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1489

7.4 Συνέχεια συναρτήσεων 1503

7.4.1 Ορισμοί και παρατηρήσεις 1503

7.4.2 Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις 1505

7.4.3 Συνέχεια βασικών συναρτήσεων 1506

7.4.4 Ιδιότητες της εκθετικής συναρτήσεως 1507

7.4.5 Ιδιότητες της λογαριθμικής συναρτήσεως 1507

7.4.6 Είδη ασυνέχειας συναρτήσεων 1509

7.4.7 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων 1510

7.4.8 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1517

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ 1557

8 Παράγωγος συναρτήσεως 1559

8.1 Παράγωγος μιας συναρτήσεως f στη θέση x_0 1559

8.2 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου 1565

8.3 Σύνοψη των βασικών σημείων του γραφήματος της f 1569

8.4 Η έννοια της μερικής παραγώγου 1570

8.5 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων 1571

8.6 Η άλγεβρα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων 1574

8.7 Αντίστροφες υπερβολικών συναρτήσεων 1580

8.8 Παράγωγοι βασικών και σύνθετων συναρτήσεων 1582

8.9 Το διαφορικό συναρτήσεως 1583

8.10 Βασικές προτάσεις διαφορίσεως 1585

8.11 Παράγωγοι και διαφορικά ανωτέρας τάξεως 1586
8.12 Θεμελιώδη θεωρήματα του διαφορικού λογισμού 1592
8.13 Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής ή θ. του Lagrange 1600
8.14 Θεωρήματα μονοτονίας 1603
8.15 Θεωρήματα τοπικών ακροτάτων τιμών 1607
8.16 Κυρτές (υπεργραμμικές), κοίλες (υπογραμμικές) συναρτήσεις και σημεία καμπής 1609
8.17 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1616
8.18 Μελέτη και χάραξη γραφικής παραστάσεως συναρτήσεως 1795
8.19 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1796
8.20 Τύπος του Taylor – Αναπτύγματα κατά Taylor 1815
8.21 Αξιομνημόνευτα αναπτύγματα 1818
8.22 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1819

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ 1825

9.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα 1827
9.1.1 Εισαγωγή 1827
9.1.2 Γενικοί κανόνες 1830
9.1.3 Πίνακας στοιχειωδών αορίστων ολοκληρωμάτων 1830
9.1.4 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1832
9.1.5 Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες ολοκλήρωση 1843
9.1.6 Ολοκλήρωση πηλίκου 1853
9.1.7 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση 1856
9.1.8 Αναγωγικοί τύποι 1862
9.1.9 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων 1869
9.1.10 Ολοκλήρωση με ανάλυση σε απλά κλάσματα 1871
9.1.11 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων 1879
9.1.12 Ολοκληρώματα της μορφής $\int A(e^{ax})\,dx$ 1886

9.1.13 Ολοκληρώματα της μορφής $\int F(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}\,)\,dx$,
όπου F ρητή συνάρτηση και $m,n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 1889

9.1.14 Ολοκληρώματα της μορφής $\int F(x, \sqrt{(ax+b)/(kx+\ell)}\,)\,dx$,
όπου F ρητή συνάρτηση και $a\ell \neq kb$ 1889

9.1.15 Ολοκληρώματα της μορφής, $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx$,
όπου $a \neq 0$ και $b^2-4ac \neq 0$ 1891

9.1.16 Ολοκληρώματα της μορφής $\int F(x, \sqrt{1 \pm x^2}\,)\,dx$, $\int F(x, \sqrt{x^2-1}\,)\,dx$ 1894

9.1.17 Αόριστα ολοκληρώματα, υποδειγματικώς λυμένα 1897

9.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα 1925

9.2.1 Εισαγωγή 1925

9.2.2 Εφαρμογές 1930

9.2.3 Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας 1934

9.2.4. Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος 1935

9.2.5. Ύπαρξη και υπολογισμός
μιας παράγουσας συνεχούς συναρτήσεως 1940

9.2.6 Γεωμετρικές εφαρμογές ορισμένων ολοκληρωμάτων 1943

9.2.7 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων Riemman,
με τη μέθοδο της αντικατάστασης 1954

9.2.8 Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις υποδειγματικώς λυμένες 1955

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ 2075

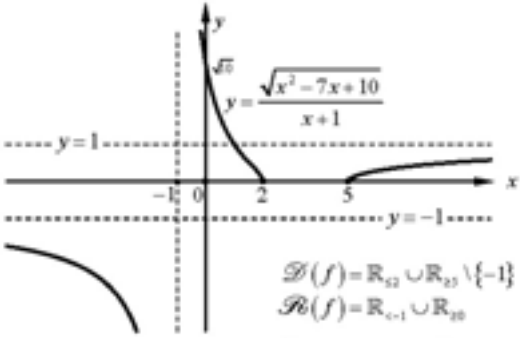
10 Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα, επί του συνόλου των
Στοιχειακών Μαθηματικών, για αυτοέλεγχο και συζήτηση **2077**

ΕΠΙΜΕΤΡΟ 2185

ΣΚΕΨΕΙΣ ΚΑΙ ΚΡΙΣΕΙΣ ΓΙΑ Ο,ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΓΥΡΩ ΜΑΣ

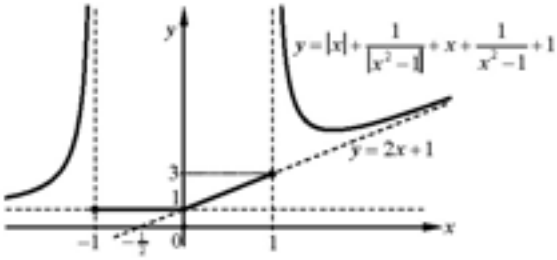
Παράδειγμα 5. *Η συνάρτηση* f *με τύπο* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}$, *έχει τις* $x=1$, $x=-1$ *ως οριζόντιες ασύμπτωτες και την* $x=-1$ *ως κατακόρυφη.*

Οριζοντίες ασύμπτωτες	Κατακόρυφη ασύμπτωτη
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm 1$	$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$
Δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη	



Παράδειγμα 6. *Η συνάρτηση* f *με τύπο* $f(x)=|x|+\dfrac{1}{|x^2-1|}+x+\dfrac{1}{x^2-1}+1$, *έχει την* $y=1$ *ως οριζόντια ασύμπτωτη, τις* $x=1$, $x=-1$ *ως κατακόρυφες ασύμπτωτες και την* $y=2x+1$ *ως πλάγια ασύμπτωτη.*

Οριζόντια ασύμπτωτη	Κατακόρυφες ασύμπτωτες
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1,\quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$
Πλάγια ασύμπτωτη	
$p=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}f(x)\right)=2,\quad q=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-px\right)=1\quad\Rightarrow y=px+q=2x+1$	



Παράδειγμα 7. *Η συνάρτηση* f *με τύπο* $f(x)=\dfrac{x+|x|+2}{x^3-|x|+2}\cdot x^3$, *έχει την* $y=2$ *ως οριζόντια ασύμπτωτη, την* $x=-1$ *ως κατακόρυφη και την* $y=2x+2$ *ως πλάγια.*

Οριζόντια ασύμπτωτη	Κατακόρυφες ασύμπτωτες
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$	$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$
Πλάγια ασύμπτωτη	
$p=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}f(x)\right)=2,\quad q=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-px\right)=2\quad\Rightarrow y=px+q=2x+2$	

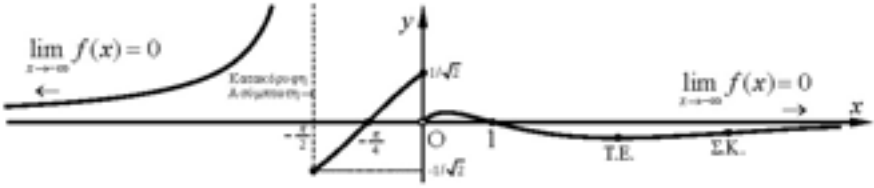
Παρατήρηση 2. Στις ασυνεχείς συναρτήσεις με πεπερασμένο (ή και αριθμήσιμο) πλήθος σημείων ασυνεχείας, η πρόταση της παρατηρήσεως 1, εφαρμόζεται ως έχει. Απλώς, τα υποδιαστήματα σταθερού προσήμου της συναρτήσεως, προσδιορίζονται από τις ρίζες και τα σημεία ασυνεχείας της συναρτήσεως, στο πεδίον ορισμού της.

Άσκηση 23. Να γίνει η μελέτη του προσήμου της $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}, & \text{αν } x>0\\ \sin(x+\frac{\pi}{4}), & \text{αν } -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ -\dfrac{1}{x+\frac{\pi}{2}}, & \text{αν } x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Λύση. Η f έχει ρίζες 1, $-\frac{\pi}{4}$ και παρουσιάζει ασυνέχεια στις θέσεις 0, $-\frac{\pi}{2}$.

Διαστήματα	$\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Ο αριθμός x_0 έχει επιλεγεί τυχαίως	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	2
$f(x_0)$	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\ln\frac{2+4\sqrt{e}}{1+4\sqrt{e}}$	$\ln\frac{2+e^2}{4+e^2}$
Πρόσημο της f	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$



Άσκηση 24. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις sin και cos είναι συνεχείς στην θέση $x_0=0$.

Απόδειξη. **i)** Επειδή $\cos 2\varphi=1-2\sin^2\varphi\Rightarrow 1-\cos 2\varphi=2\sin^2\varphi\Rightarrow 1-\cos\varphi=$ $=2\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)\le 2\cdot(\frac{1}{4}\varphi^2)=\frac{1}{2}\varphi^2$. Επομένως έχομε:

$$\left\{\begin{array}{l}0\le 1-\cos\varphi\le\frac{1}{2}\varphi^2\\ \lim\limits_{\varphi\to 0}0=0=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varphi\to 0}\varphi^2\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\varphi\to 0}(1-\cos\varphi)=0\Rightarrow\lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi=1=\cos 0\Rightarrow$$

η cos είναι συνεχής στην θέση $x_0=0$.

ii) $|\sin\varphi-\sin\varphi_0|=|\sin((\varphi-\varphi_0)+\varphi_0)-\sin\varphi_0|=$

$=|\sin(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi_0+\cos(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi_0-\sin\varphi_0|\le|\sin(\varphi-\varphi_0)\cdot\cos\varphi_0|+$

$+|\sin\varphi_0\cdot(\cos(\varphi-\varphi_0)-1)|\le|\varphi-\varphi_0|\cdot 1+|\sin\varphi_0|\cdot|1-\cos(\varphi-\varphi_0)|$.

Επειδή $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0}\left(|\varphi-\varphi_0|+|\sin\varphi_0|\cdot|1-\cos(\varphi-\varphi_0)|\right)=0+|\sin\varphi_0|\cdot 0=0$,

$$f(3x)-3x \le f(x)-x \le f(2x)-2x \text{, με } f(0)=0 \qquad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(x)-x$, οπότε η σχέση (1) ισοδυναμεί με $g(3x) \le g(x) \le g(2x)$, με $g(0)=0$ (2)

Επιλέγομε αυθαιρέτως ένα θετικό αριθμό $a \in \mathbb{R}_{>0}$ και θέτομε:

$$m = \min_{x\in[-a,a]} g(x) \text{ και } M = \max_{x\in[-a,a]} g(x) \qquad (3)$$

Από το θεώρημα του ***Bolzano-Weierstrass*** υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in \mathbb{R}_{[-a,a]}$ τέτοιος, ώστε $g(x_0)=M$.

Από τη μελέτη της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τύπο $x_n = 3^{-n}x_0$, προκύπτει ότι: $x_0 = 3x_1 = 3^2x_2 = \ldots = 3^n x_n = 3^{n+1}x_{n+1}$ και άρα $x_n = 3x_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_n) = g(3x_{n+1}) \overset{(2)}{\le} g(x_{n+1}) \Rightarrow g(x_n) \le g(x_{n+1})$. Επομένως έχομε:

$g(x_{n+1}) \ge g(x_n) \ge g(x_{n-1}) \ge \ldots \ge g(x_0) = M \Rightarrow g(x_n) \ge M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (4)

και επειδή ο αριθμός $x_n \in \mathbb{R}_{[-a,a]}$, συνάγεται ότι $g(x_n) \le M$ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) συμπεραίνομε ότι $g(x_n)=M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής και λόγω της (2), έπεται ότι $0 = g(0) = f(0) - 0 = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = M \Rightarrow M = 0$ και εξαιτίας του ορισμού (3) προκύπτει ότι $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_{[-a,a]}$ (6)

Με ανάλογο τρόπο χρησιμοποιώντας από την (2), την $g(x) \le g(2x)$ καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_{[-a,a]}$ (7)

Οι σχέσεις (6) και (7) μας οδηγούν τελικώς στο συμπέρασμα ότι $g(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_{[-a,a]}$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}_{>0}$ το οποίο έχει ως συνέπεια ότι $g(x) = f(x) - x = 0$ και επομένως $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 71. Ορειβάτης ξεκινά από την βάση Β ενός βουνού στις 6 π.μ. και φτάνει στην κορυφή Κ στις 4 μ.μ. της ίδιας ημέρας. Την επόμενη ημέρα ξεκινά από την κορυφή Κ στις 6 π.μ. και ακολουθώντας την ίδια διαδρομή κατεβαίνει στην βάση Β στις 4 μ.μ. της ίδιας ημέρας. Να αποδείξετε ότι, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίον βρίσκεται ο ορειβάτης, την ίδια χρονική στιγμή όταν ανεβαίνει και όταν κατεβαίνει.

Απόδειξη. Αν η f είναι η συνάρτηση που περιγράφει την θέση του ορειβάτη (σημείο Θ_1, βλέπε παρακάτω σχήμα) κατά την άνοδό του, τότε $f(t)$ θα είναι το διάστημα που διήνυσε από την βάση Β του βουνού, συναρτήσει του χρόνου. Αν g είναι η συνάρτηση που περιγράφει την θέση

του ορειβάτη (σημείο Θ_2) κατά την κάθοδό του, τότε $g(t)$ θα είναι το διάστημα που εναπομένει να διανύσει για να φτάσει στην βάση B του βουνού. Οι συνεχείς συναρτήσεις f, g πληρούν τις ισότητες:

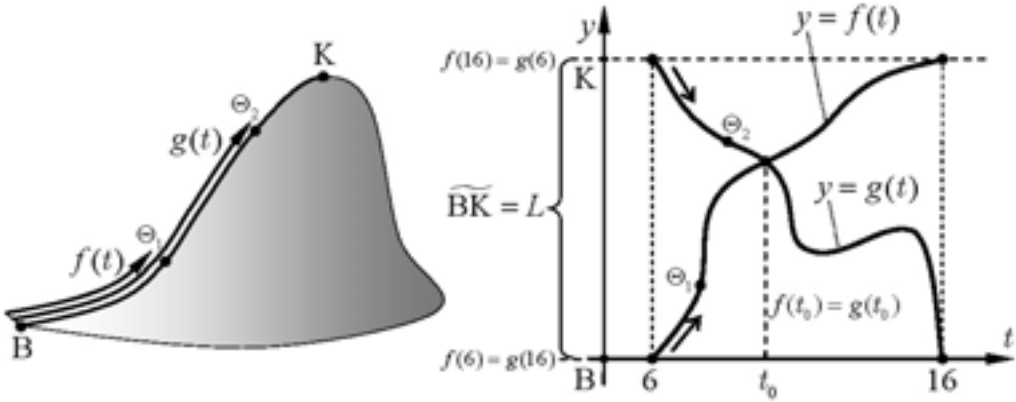
i) $f(6) = g(16) = 0$, αφού την χρονική στιγμή $t = 6$ της πρώτης ημέρας και την χρονική στιγμή $t = 16$ της δεύτερης ημέρας, ο ορειβάτης βρίσκεται στην βάση B του βουνού.

ii) $f(16) = g(6) = L$ αφού την χρονική στιγμή $t = 16$ της πρώτης ημέρας και την χρονική στιγμή $t = 6$ της δεύτερης ημέρας βρίσκεται στην κορυφή K του βουνού η οποία απέχει μήκος δρόμου L από την βάση B).

Η $\sigma(t) = f(t) - g(t)$ είναι συνεχής στο $[6,16]$ και επιπλέον ισχύει:

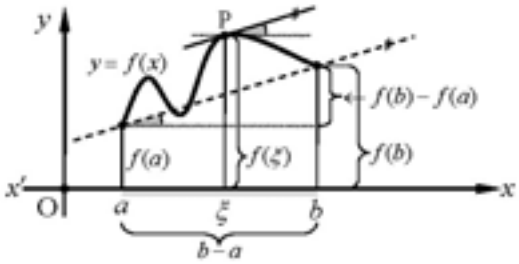
$$\sigma(6)\cdot\sigma(16) = (f(6) - g(6))(\underbrace{f(16)}_{g(6)} - \underbrace{g(16)}_{f(6)}) = -(\underbrace{f(6) - g(6)}_{0-L})^2 = -L^2 < 0,$$

οπότε βάσει του θεωρήματος των ***Bolzano–Weierstrass***, έπεται ότι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $t_0 \in (6,16)$ τέτοιο, ώστε $\sigma(t_0) = 0$ που συνεπάγεται ότι ο ορειβάτης θα βρίσκεται στην θέση $f(t_0) = g(t_0)$ και κατά την άνοδο και κατά την κάθοδο.



Παρατήρηση. *Ισχύει γενικότερα, ένα από τα πιο όμορφα θεωρήματα της Τοπολογίας, το θεώρημα των* ***Karol Borsuk-Stanislaw Ulam****: Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε μία σφαίρα S και είναι συνεχείς, τότε υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία P_0 και P_0' της σφαίρας τέτοια, ώστε $f(P_0') = f(P_0)$ και $g(P_0') = g(P_0)$. Το θεώρημα των* ***Karol Borsuk-Stanislaw Ulam*** *προκύπτει από το επόμενο* ***Θεώρημα της κοινής ρίζας:***

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχείς και αντισυμμετρικές σε μια σφαίρα S, τότε υπάρχει ένα σημείο P_0 στο οποίο και οι δύο αυτές συναρτήσεις παίρνουν τιμή ίση με το μηδέν, δηλαδή $F(P_0) = G(P_0) = 0$.



Σχόλια. ***1)*** *Το θεώρημα είναι γνωστό και ως* ***θεώρημα της μέσης τιμής*** *του διαφορικού λογισμού ή* ***θεώρημα των πεπερασμένων αυξήσεων*** *(ονομασία που προήλθε από το γεγονός ότι η διαφορά $f(b)-f(a)$ ονομάζεται αύξηση της f από a έως b).*

2) *Ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του* ***Lagrange:***

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και συνεχής στα σημεία a και b τότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Θεώρημα 5. «Θεώρημα της μέσης τιμής του ***Cauchy***».

«Γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού».

Υποθέτομε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b), ενώ $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη. Προφανώς $g(a) \neq g(b)$, γιατί στην αντίθετη περίπτωση από το θεώρημα του ***Rolle***, θα υπήρχε $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση F με τύπο:

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$, $x \in [a,b]$

που είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b) με παράγωγο:

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$, $x \in (a,b)$ και επιπλέον

$F(a) = 0 = F(b)$. Άρα, από το θεώρημα του ***Rolle***, υπάρχει

$\xi \in (a,b)$ με $F'(\xi) = 0$ που δίνει την ζητουμένη σχέση.

Παρατήρηση. Γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να δοθεί αν θεωρήσομε την επίπεδο καμπύλη που εκφράζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις:

$$\{\, X = g(t) \wedge Y = f(t) \,\},\ \forall t \in \mathbb{R}_{[a,b]}$$

Η κλίση της καμπύλης για ένα δοσμένο t είναι $\frac{dY}{dX} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ και η κλίση της ευθείας που συνδέει τα σημεία $\mathrm{A}(f(a),g(a))$, $\mathrm{B}(f(b),g(b))$ είναι $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Το θεώρημα λέει ότι οι δύο αυτές κλίσεις είναι ίσες, για τουλάχιστον ένα $t = \xi \in (a,b)$ δηλαδή υπάρχει σημείο $\mathrm{P}\big(f(\xi), g(\xi)\big)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Πράγματι, από το θεώρημα του ***Lagrange***, θα είναι:
$f(d)-f(c)=(d-c)f'(\xi)$, όπου $\xi\in(c,d)\subseteq(a,b)$.
Επειδή εξ' υποθέσεως η παράγωγος μηδενίζεται στο (a,b), συνάγεται ότι θα ισούται με μηδέν και για $x=\xi$, δηλαδή $f'(\xi)=0$ πράγμα που συνεπάγεται ότι $f(d)-f(c)=0 \Rightarrow f(d)=f(c)$.

Πόρισμα. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in[a,b]$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο $(f-g)'=f'-g'=0$, προκύπτει ότι η διαφορά $f-g$ είναι σταθερή στο $[a,b]$, δηλαδή $f(x)-g(x)=c$.

Πρόταση. Για να είναι η συνάρτηση f σταθερή στο διάστημα $[a,b]$, πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στα σημεία a,b και να ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

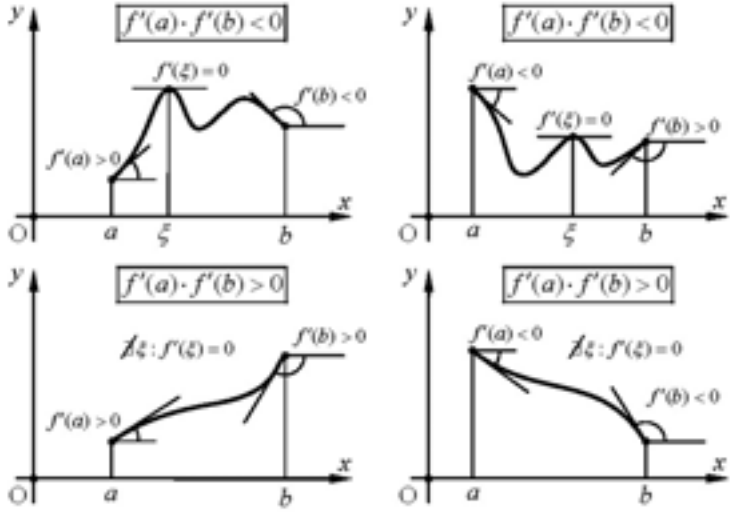
Σχόλιο 1. Το θεώρημα και το πόρισμα ισχύουν μόνο στην περίπτωση που έχομε διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

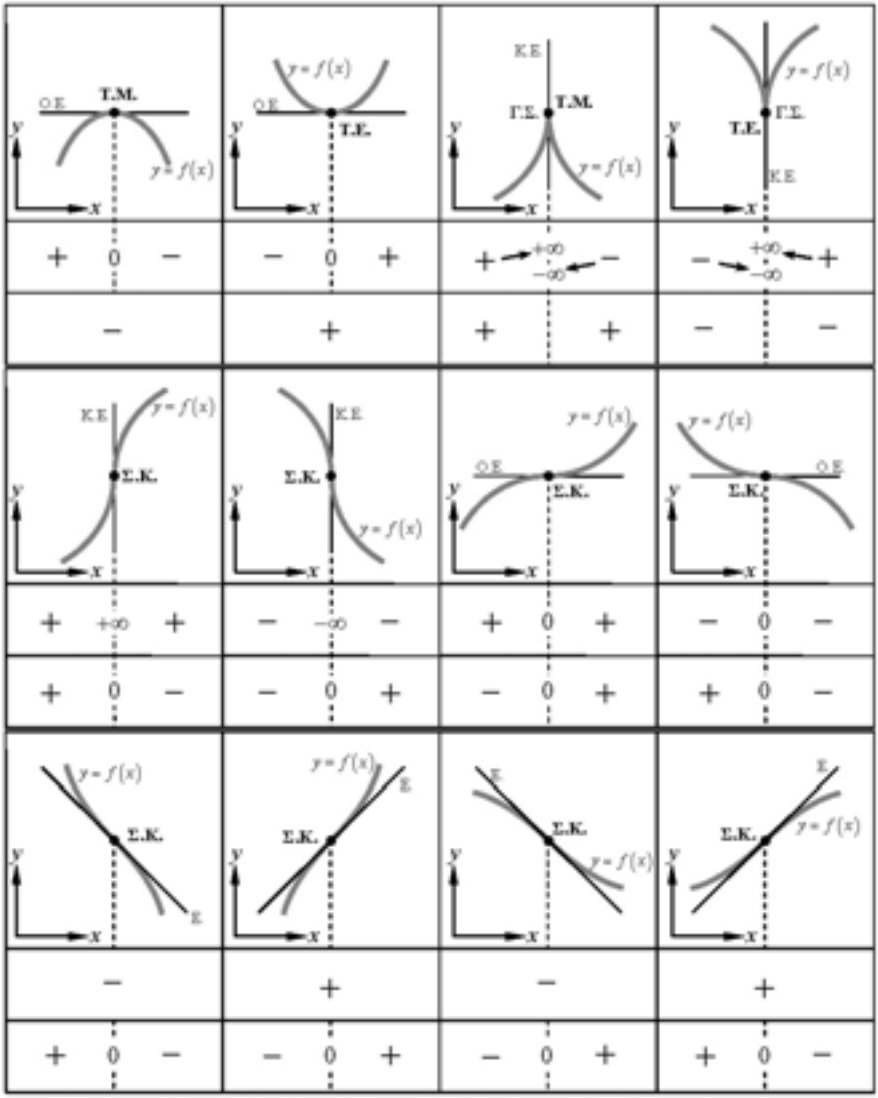
Π.χ.: Αν $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } 0<x<1\\ 2, & \text{αν } 1<x<2\end{cases}$ *τότε* $f'(x)=0,\ \forall x\in\Delta=(0,1)\cup(1,2)$,

αλλά η f *δεν είναι σταθερή στο* Δ.

Σχόλιο 2. Το πόρισμα ισχύει όταν οι συναρτήσεις f,g *είναι παραγωγίσιμες, δηλαδή έχουν παραγώγους πεπερασμένες, στα εσωτερικά σημεία του* Δ.

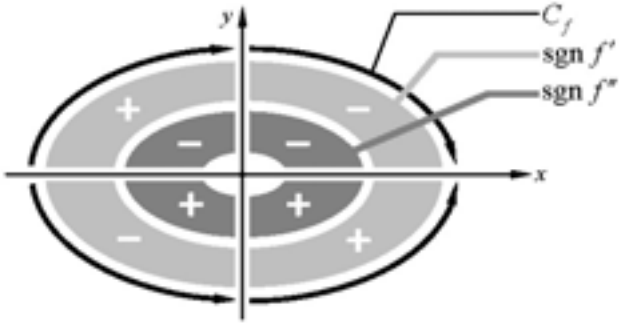
Θεώρημα 8. «Πρώτο θεώρημα του ***Darboux***»





Τ.Μ. = Τοπικό μέγιστο, Τ.Ε. = Τοπικό ελάχιστο, Σ.Κ. = Σημείο καμπής, Γ.Σ. = Γωνιακό σημείο
Ε. = Εφαπτομένη, Κ.Ε. = Κατακόρυφη εφαπτομένη, Ο.Ε. = Οριζόντια εφαπτομένη.

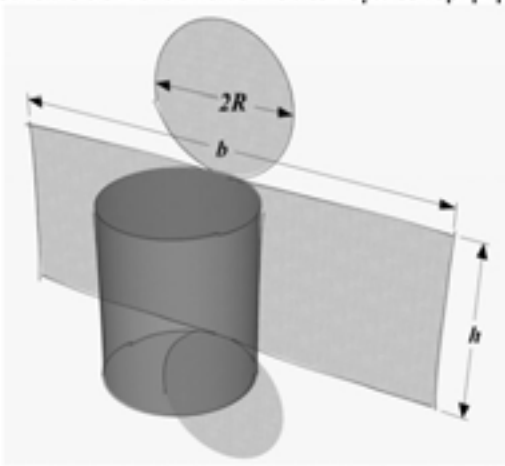
Οπτικοποίηση της συσχέτισης του γραφήματος C_f της συναρτήσεως f με τα πρόσημα των παραγώγων της f' και f''



Ασκηση 145. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερά περίμετρο 2τ, να βρείτε εκείνο που έχει μέγιστο εμβαδό.

Λύση. Αν x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου, έχομε $2(x+y)=2\tau \Rightarrow$ $\Rightarrow x+y=\tau \Rightarrow y=\tau-x$ και $\mathrm{E}=\mathrm{E}(x)=x(\tau-x) \Rightarrow \mathrm{E}'(x)=-2x$, $\mathrm{E}''(x)=-2$ και $\mathrm{E}'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\tau$ Έχομε $\mathrm{E}''(\frac{1}{2}\tau)=-2<0 \Rightarrow \mathrm{E}_{\max}=$ $=\mathrm{E}(\frac{1}{2}\tau)=\frac{1}{2}\tau(\tau-\frac{1}{2}\tau)=\frac{1}{4}\tau^2$ και λαμβάνει χώρα όταν $x=\frac{1}{2}\tau=y$, δηλαδή όταν τούτο γίνει τετράγωνο.

Ασκηση 146. Βιομηχανία χρειάζεται για την συσκευασία κάποιου προϊόντός της, κουτιά κυλινδρικού σχήματος χωρητικότητος ενός λίτρου. Κατά την κατασκευή των κουτιών, οι κυλινδρικές βάσεις αποκόπτονται από χάρτινη λωρίδα, ενώ οι παράπλευρες επιφάνειες από διαφορετική χάρτινη λωρίδα. Η χαρτοβιομηχανία που εφοδιάζει τον κατασκευαστή των κουτιών με χάρτινες λωρίδες, μπορεί να παραδώσει τις λωρίδες με το πλάτος που επιθυμεί ο κατασκευαστής, αλλά όχι περισσότερο από 1m (και όχι με όσο ακριβώς πλάτος επιθυμεί ο κατασκευαστής). Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού (ακτίνα βάσης και ύψος) για να είναι όσο το δυνατόν οικονομικότερη η κατασκευή.



Λύση. **i)** Αν η βιομηχανία κατασκευής των κιβωτίων αγόραζε το χαρτί κομμένο (στα σχήματα που χρειάζεται για το κυλινδρικό κιβώτιο) με αξία ανά τετραγωνικό επιφάνειας του χαρτιού, την ίδια που αγοράζει τις λωρίδες χαρτιού, το πρόβλημα θα ήταν ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση της εξωτερικής επιφανείας του κυλινδρικού κουτιού. Τα οικονομικά αποτελέσματα της περιπτώσεως αυτής, θα ήταν τα βέλτιστα και για να έχομε τα αποτελέσματά της σαν μέτρο συγκρίσεως επιλύομε την περίπτωση αυτήν. Για ευκολία στις πράξεις, θέτομε το μήκος ακμής κύβου χωρητικότητας V ίσο με $a=\sqrt[3]{\mathrm{V}}$ (1)

Αν είναι V η χωρητικότητα του κυλινδρικού κουτιού ισχύει:

$\mathrm{V}=\pi R^2 h$ και συνεπώς λόγω της (1) $\Rightarrow h=\mathrm{V}/(\pi R^2)=a^3/(\pi R^2)$ (2)

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού είναι $\mathcal{E} = b \cdot h + 2 \cdot \pi R^2 =$
$= 2\pi R \cdot h + 2 \cdot \pi R^2 \Rightarrow \mathcal{E} = 2\pi R(h+R)$ (3)

Από τις (2) και (3) έπεται ότι $\mathcal{E}(R) = 2 \cdot \dfrac{a^3 + \pi R^3}{R}$ (4)

Επειδή $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} = 2 \cdot \dfrac{2\pi R^3 - a^3}{R^2}$ και $\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial R^2} = 4 \cdot \dfrac{\pi R^3 + a^3}{R^3} > 0$ συνάγεται ότι, η $\mathcal{E}(R)$ έχει ελάχιστο στην θέση $R = r$, με το r να είναι ρίζα της

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} = 2 \cdot \frac{2\pi R^3 - a^3}{R^2} = 0 \overset{R=r}{\Rightarrow} 2\pi r^3 - a^3 = 0 \overset{a \in \mathbb{R}_{>0}}{\Rightarrow} r = \frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad (5)$$

Η ελαχίστη κατανάλωση χαρτιού (στην περίπτωση που δεν χρεώνεται το περίσσευμα-ρετάλι) λόγω της (4) θα είναι:

$$\mathcal{E}(r) = \tfrac{2}{r}(a^3 + \pi r^3) \overset{(5)}{=} \tfrac{2}{a} \cdot (a^3 + \tfrac{1}{2}a^3)\sqrt[3]{2\pi} \Rightarrow \mathcal{E}_0 = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi} \cdot a^2 \quad (6)$$

ii) Η απλούστερη περίπτωση θα ήταν, αν η λωρίδα από την οποία αποκόπτονται οι κυκλικές βάσεις είχε πλάτος $2R$. Δηλαδή, η αναγκαία επιφάνεια χαρτιού για κάθε κυκλική βάση να ήταν $(2R)^2$.

Η συνολική αναγκαία επιφάνεια, για την κατασκευή του κουτιού θα είναι $\mathcal{E} = b \cdot h + 2 \cdot (2R)^2 = 2\pi R \cdot h + 8R^2 \overset{(2)}{=} 2\pi R \cdot \dfrac{a^3}{\pi R^2} + 8R^2 =$

$= \tfrac{2}{R}a^3 + 8R^2 \Rightarrow \mathcal{E}(R) = \tfrac{2}{R}(a^3 + 4R^3)$ (7)

Επειδή $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} = 2 \cdot \dfrac{8R^3 - a^3}{R^2} = \dfrac{2}{R^2}(2R - a)(\underbrace{4R^2 + 2aR + a^2}_{>0})$ και

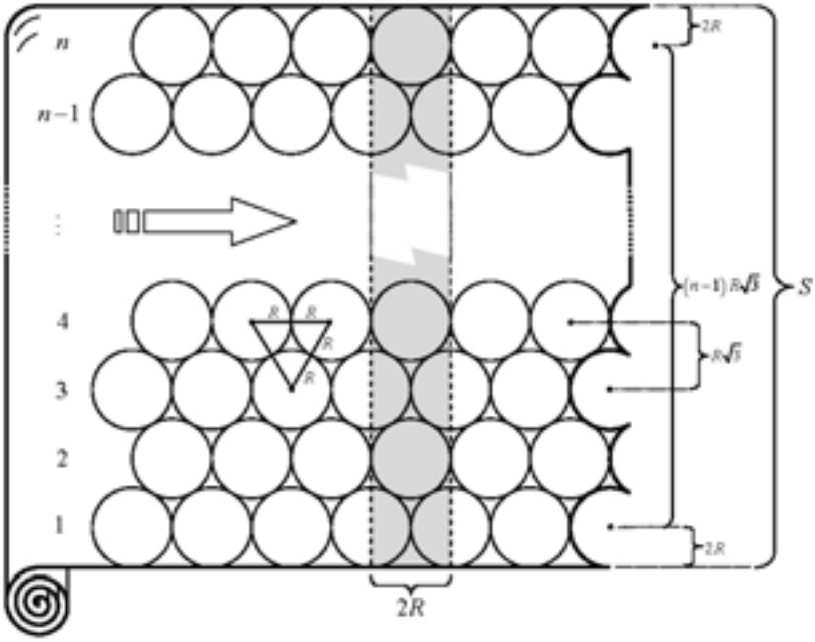
$\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial R^2} = \dfrac{4}{R^3}(4R^3 + a^3) > 0$ συνάγεται ότι η $\mathcal{E}(R)$ έχει ελάχιστο στην θέση $R = r$ με το r να είναι ρίζα της $\partial \mathcal{E} / \partial R = 0 \Rightarrow r = \tfrac{1}{2}a$ (8)

Από (2),(8) το ύψος του κυλίνδρου είναι $h_m = \dfrac{a^3}{\pi \cdot (\frac{1}{2}a)^2} = \dfrac{4a}{\pi}$ (9)

και η αναγκαία επιφάνεια χαρτιού, που είναι ανάλογη του κόστους, για 1 κυλινδρικό κουτί θα είναι $\mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2}a\right) = \mathcal{E}_1 \overset{(7)}{=} 2 \cdot \dfrac{a^3 + 4(\frac{1}{2}a)^3}{\frac{1}{2}a} = 6a^2$ (10)

Όπως ήταν αναμενόμενο από (6),(10) $\Rightarrow \mathcal{E}_1 = 6a^2 > 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi} \cdot a^2 = \mathcal{E}_0$ αφού ισχύει $216 = (6)^3 > (3 \cdot \sqrt[3]{2\pi})^3 = 54\pi \simeq 169.56$. Θα δούμε παρακάτω ότι η περίπτωση αυτή (για $n = 1$) δεν είναι η οικονομικότερη για την κατασκευή του κυλινδρικού κουτιού.

iii) Στην πραγματικότητα για να γίνει οικονομικότερη η κατασκευή θα πρέπει το πλάτος της λωρίδας να υπολογιστεί με βάση την διάταξη μεγίστης πυκνότητος (*packungsdichte / packing density*) των κυκλικών βάσεων που θα αποκόπτονται από την λωρίδα χαρτιού, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν έχομε n σειρές (γραμμές) με κυκλικές βάσεις στην λωρίδα πλάτους S, σε ένα κάθετο τμήμα μήκους $2R$ περιέχονται n κυκλικές βάσεις. Επειδή η απόσταση μεταξύ δύο συνεχομένων σειρών είναι $2R\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=R\sqrt{3}$, το πλάτος S θα είναι $S=(n-1)\cdot R\sqrt{3}+2R$ (11)

Π.χ. για $n=1$ έχομε $S|_{n=1}=2R$ και για $n=2 \Rightarrow S|_{n=2}=R(2+\sqrt{3})$.

Κατά τον τρόπο αυτό από την (11) συμπεραίνομε ότι για κάθε κυκλική βάση αντιστοιχεί (χρεώνεται) επιφάνεια χαρτιού ίση με

$$\varepsilon=\tfrac{1}{n}2R\cdot S=\tfrac{1}{n}(2+(n-1)\sqrt{3})\cdot 2R^2 \qquad (12)$$

Η επιφάνεια χαρτιού που χρειάζεται για ένα κιβώτιο θα είναι ίση με:

$$\mathcal{E}(R)=2\pi R\cdot h+2\varepsilon \overset{(2),(12)}{=} 2\pi R\cdot\frac{a^3}{\pi R^2}+2\cdot\frac{2+(n-1)\sqrt{3}}{n}\cdot 2R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(R)=\frac{2a^3}{R}+R^2\cdot q_n^3,\ \forall R\in\mathbb{R}_{>0} \qquad (13)$$

όπου $q_n^{\,3}\equiv 4(\sqrt{3}+\frac{1}{n}(2-\sqrt{3}))>0,\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ (14)

Επειδή είναι $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial R}=-\frac{2a^3}{R^2}+2R\cdot q_n^3$ και $\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial R^2}=\frac{4a^3}{R^3}+2q_n^3>0$, η $\mathcal{E}$ λαμβάνει ελαχίστη τιμή στην θέση που ικανοποιείται η εξίσωση:

Απόδειξη. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}_{(1,9)}$, άρα η f' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}_{(1,9)}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_{[1,4]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_{(1,4)}$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \mathbb{R}_{(1,4)}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{1}{3}(f(4) - f(1))$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_{[4,9]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_{(4,9)}$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \mathbb{R}_{(4,9)}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{1}{5}(f(9) - f(4))$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_{(1,9)}$ και $1 < \xi_1 < \xi_2 < 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{1}{3}(f(4) - f(1)) < \frac{1}{5}(f(9) - f(4)) \Rightarrow 5f(4) - 5f(1) <$ $< 3f(9) - 3f(4) \Rightarrow 8f(4) < 5f(1) + 3f(9) \Rightarrow f(4) < \frac{5}{8}f(1) + \frac{3}{8}f(9)$.

Άσκηση 245. Αν $a, b \in \mathbb{R}_{>0} \wedge a \neq b$, να αποδείξετε ότι $ab < \left(\frac{b-a}{\ln b - \ln a}\right)^2$.

Απόδειξη. Θέτομε $\begin{pmatrix} a = e^A \\ b = e^B \end{pmatrix}$, οπότε $\left(\frac{e^B - e^A}{B - A}\right)^2 > e^A e^B$ και $\frac{e^{B-A} - 1}{B - A} \cdot \frac{1 - e^{A-B}}{B - A} > 1$.

Αν $B - A \equiv x \in \mathbb{R}_{>0}$, τότε έχομε $\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1 - e^{-x}}{x} > 1 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} > 1$.

Αρκεί να αποδείξομε ότι $f(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ και επειδή $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, αρκεί $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, δεδομένου ότι $f'(0) = 0$. Αφού $f'(0) = 0$, αρκεί $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_{>0}$ και επειδή $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2$ με $f''(0) = 0$, αρκεί $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Όμως $f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.

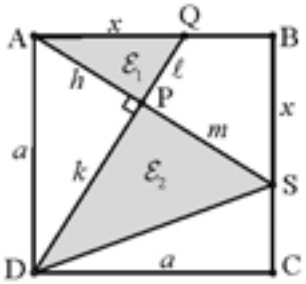
Επομένως η f'' είναι γνησίως αύξουσα αφού $f''(0) = 0$, άρα $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_{>0}$, αφού $f'(0) = 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Τελικώς $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ πράγμα που έπρεπε να αποδείξομε.

Σχόλιο. *Η ανισότητα* $\frac{1}{x^2}(e^x + e^{-x} - 2) > 1$, *αποδεικνύεται επίσης, με την ανάπτυξη των εκθετικών. Πράγματι,* $\frac{1}{x^2}(e^x + e^{-x} - 2) = \frac{1}{x^2}(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots) +$ $+ \frac{1}{x^2}(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \ldots) > 1$.

Άσκηση 246. Επί των πλευρών AB, BC τετραγώνου ABCD, θεωρούμε αντιστοίχως τα σημεία Q, S εις τρόπον, ώστε $AS \perp DQ$ και $\{P\} \equiv AS \cap DQ$. Πότε η τιμή του εμβαδού $\mathcal{E} = (AQP) + (PDS)$ γίνεται ελάχιστη;

Λύση. Θα εκφράσομε το εμβαδόν $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ (βλέπε σχήμα) συναρτήσει του $x = AQ$ και της πλευράς a του τετραγώνου.



Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα και επειδή $\triangle DQA = \triangle ASB$ έχομε

$$AQ = BS = x \text{ και } DQ = AS = k + \ell = h + m = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad (1)$$

Στο ορθογώνιο $\triangle DAQ$ ισχύει $x^2 = \ell \cdot DQ \wedge a^2 = k \cdot DQ$, απ' όπου λόγω της (1) προκύπτει ότι $k = a^2 \big/ \sqrt{a^2 + x^2}$ και $\ell = x^2 \big/ \sqrt{a^2 + x^2}$ (2)

Επειδή $h^2 = k \cdot \ell \overset{(2)}{\Rightarrow} h^2 = \dfrac{a^2 x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow h = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (3)

Το $m = AS - h \overset{(1),(3)}{=} \sqrt{a^2 + x^2} - \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow m = \dfrac{a^2 + x^2 - ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (4)

Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} h \cdot \ell + \frac{1}{2} k \cdot m$ και βάση των σχέσεων (2),(3),(4)

προκύπτει ότι $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2} \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \dfrac{1}{2} \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \dfrac{a^2 + x^2 - ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E} = a \dfrac{x^3 + a^3 + ax^2 - a^2 x}{2(a^2 + x^2)} = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{(\frac{x}{a})^3 + 1 + (\frac{x}{a})^2 - (\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2}$ και με $t \equiv \dfrac{x}{a}$

προκύπτει ότι $\dfrac{\mathcal{E}}{a^2} = \dfrac{t^3 + t^2 - t + 1}{2(1 + t^2)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + t - \dfrac{2t}{1 + t^2}\right),\ \forall t \in \mathbb{R}_{[0,1]}$ (5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(t) = \dfrac{1+t}{2} - \dfrac{t}{1+t^2}$ στο $\mathbb{R}_{[0,1]}$.

Ισχύει $f'(t) = \dfrac{t^4 + 4t^2 - 1}{2(1+t^2)^2}$ και $f''(t) = \dfrac{2t(t^2 - 3)}{(1+t^2)^3} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_{[0,1]}$ (6)

Τα πιθανά ακρότατα θα είναι οι ρίζες της $f'(t) = 0$ δηλαδή εκεί ό-

που $t^4 + 4t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = -2 + \sqrt{5} \overset{t \in \mathbb{R}_{[0,1]}}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$. Δεδομένου ότι

$f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ και λόγω της (6) έχομε ολικό ελάχιστο στο $\mathbb{R}_{[0,1]}$

στην θέση $t = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ με $f_{\min} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}(-11 + 5\sqrt{5}}\right) = 0.3498$.

Τελικώς είναι $\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}\big|_{x = a\sqrt{-2+\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}(-11 + 5\sqrt{5}}\right) \cdot a^2 = 0.35\, a^2$.

v) Αν $\varphi(x)=2^x$ τότε $\varphi'(x)=2^x\ln 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Με βάση το θεώρημα του ***Lagrange***, στο $[\min(x,2x+1),\max(x,2x+1)]\equiv[m,M]$ συνάγεται ότι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(m,M)$ τέτοιο ώστε:

$$2^x-2^{2x+1}=\varphi'(\xi)\cdot(x-(2x+1))=-(x+1)\cdot 2^\xi\ln 2.$$

Η αρχική εξίσωση ισοδυναμεί με την $-(x+1)\cdot 2^\xi\ln 2=(x+1)\cdot 3^\xi\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x+1)\cdot(2^\xi\ln 2+3^\xi)=0\Leftrightarrow x=-1$, δεδομένου ότι $2^\xi\ln 2+3^\xi>0$.

Άσκηση 248. Αν $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ να αποδείξετε ότι $\ln\cos x\le-\frac{1}{2}x^2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-x+\tan x$. Τότε $f'(x)=\cos^{-2}x-1\ge 1-1=0\Rightarrow f'(x)\ge 0$. Άρα $f\uparrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2})$, επομένως $f(x)\ge f(0)\Rightarrow -x+\tan x\ge -0+\tan 0=0\Rightarrow\tan x\ge x$, για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2})$. Έχομε $\tan x\ge x\Rightarrow-\tan x\le -x\Rightarrow\int_0^t(-\tan x)\,dx\le$

$$\le\int_0^t -x\,dx\Rightarrow\int_0^t\frac{-\sin x}{\cos x}dx\le\int_0^t -x\,dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\int_0^t\frac{d\cos x}{\cos x}\le\int_0^t -x\,dx\\ \cos t>0,\ t\in[0,\frac{\pi}{2})\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\cos x\,|_0^t\le-\tfrac{1}{2}x^2\,|_0^t\Rightarrow\ln\cos t-\ln\cos 0\le-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{2}0^2\Rightarrow\ln\cos t\le-\tfrac{1}{2}t^2.$$

Αλλιώς. Θεωρούμε την g με τύπο $g(x)=\ln\cos x+\frac{1}{2}x^2$, $x\in[0,\frac{\pi}{2})$. Έχομε: $g'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}+x=\frac{x\cos x-\sin x}{\cos x}$. Αν θέσομε $h(x)\equiv x\cos x-\sin x$, με $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow h'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,\quad\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Άρα η $h\downarrow$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$ και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_{[0,\pi/2]}$, συνάγεται ότι η $h\downarrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$. Συνεπώς $h(x)<h(0)=0$ με $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Άρα $g'(x)=h(x)/\cos x<0$, δεδομένου ότι $h(x)<0\wedge\cos x>0$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Τελικώς, η g είναι $\downarrow$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$ και επειδή είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, έπεται ότι η g είναι $\downarrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, δηλαδή $g(x)\le g(0)=0$ και συνεπώς $\ln\cos x\le-\frac{1}{2}x^2$.

Άσκηση 249. Ένας μηχανικός θέλει να περιγράψει, με τον καλύτερο τρόπο, την συμπεριφορά του μέτρου μιας δυνάμεως f, συναρτήσει της μεταβλητής x. Με βάση τα πειραματικά του δεδομένα, η συνάρτηση f πληροί τις ακόλουθες έξι συνθήκες:

$$\left(\begin{array}{lll}\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}_{\ge 0} & \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1 & f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}_{\ge 0}\\ \mathscr{R}(f)=\mathbb{R}_{[0,1)} & f(1)=\frac{1}{2} & f''(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}_{\ge 0}\end{array}\right)\qquad(\Sigma)$$

Να βρείτε τουλάχιστον τέσσερις συναρτήσεις που να ικανοποιούν τις παραπάνω συναρτησιακές συνθήκες.

απ' όπου λόγω της (4) ισχύει ότι $\sum_{\text{Ομ}\,a,b,c} \frac{1}{a} = \frac{9}{2} - \sum_{\text{Ομ}\,a,b,c} f(a) \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$.

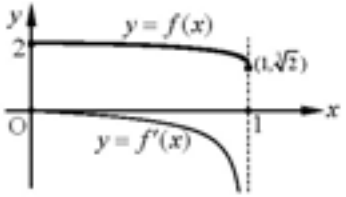
Ασκηση 288. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.
Επειδή $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}_{>0}$ και επομένως για $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, ισχύει $\frac{f(a)+f(b)}{2} \overset{Jensen}{<} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (A)

Αν θέσομε : $\{ a = 3-\sqrt[3]{3},\ b = 3+\sqrt[3]{3} \} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}\right) <$
$< \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt[3]{3}+3+\sqrt[3]{3}\right)} \Rightarrow \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Αλλιώς. Η δεδομένη σχέση ισοδυνάμως γράφεται $\sqrt[3]{1-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} < 2$ (1)

Θέτομε $x = 1/\sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{9}$, $x \in \mathbb{R}_{[0,1)}$ και θεωρούμε την f με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$. Έχομε ότι $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)$.



Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}_{[0,1)}$ ισχύει $0 < 1-x \leq 1 \leq 1+x < 2$, έπεται ότι
$1-x \leq 1+x \Rightarrow (1-x)^2 \leq (1+x)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{(1-x)^2} \wedge (\sqrt[3]{\ }) \uparrow \mathbb{R}_{[0,1)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{[0,1)}$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_{[0,1)}$, δηλαδή $f(x) < f(0)$, που οδηγεί στην $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} < 2$ και για $x = 1/\sqrt[3]{9}$ στην αποδεικτέα.

Αλλιώς. Με $a, b \in \mathbb{R}_{>0} \wedge a \neq b$ είναι $(a-b)^2(a+b) > 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2) > 0 \Leftrightarrow$
$(a-b)\cdot(a^2-b^2) > 0 \Leftrightarrow ba^2 + ab^2 < a^3 + b^3 \Leftrightarrow ab(a+b) < a^3 + b^3$ (1)

Αν θέσομε $\{ \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} \equiv a,\ \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} \equiv b \} \overset{(1)}{\Rightarrow} ab(a+b) < a^3 + b^3 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3ab(a+b) < 18 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < a^3 + b^3 + 18 = 24$, δηλαδή $(a+b)^3 < 24$ και τελικώς $a + b < 2\sqrt[3]{3}$.

Ασκηση 289. **i)** Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που πληροί την συναρτησιακή εξίσωση του ***Cauchy***:

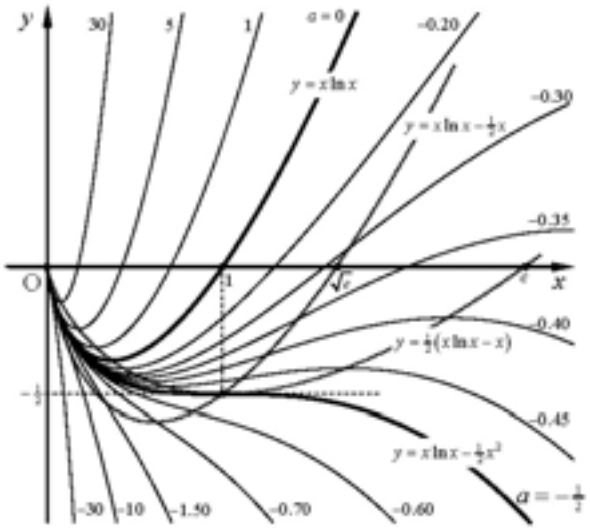
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 7. Να μελετήσετε την οικογένεια των συναρτήσεων $y = x\ln x + ax^2$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a. Επιπλέον να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής, των μεγίστων και των ελαχίστων της οικογενείας των συναρτήσεων αυτών.

Λύση. Η ύπαρξη του $\ln x$ συνεπάγεται ότι $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Έχομε $y' = 1 + 2ax + \ln x$ και $y'' = \frac{1}{x}(2ax+1)$.

Υπάρχει λοιπόν ένα σημείο καμπής όταν $y'' = \frac{1}{x}(2ax+1) = 0$, δηλαδή για $x = -\frac{1}{2a}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}_{<0}$.



Αν $a > 0$ η δεύτερη παράγωγος y'' είναι πάντοτε θετική, άρα η y' είναι γνησίως αύξουσα, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και μηδενίζεται μία φορά στην θέση $x = \xi$, όπου ξ ρίζα της $2a\xi + \ln(\xi e) = 0$.

Αν $a < 0$ η y' είναι γνησίως αύξουσα με $y'\left(\frac{-1}{2a}\right) = \ln\left(\frac{-1}{2a}\right)$ και παίρνει τιμές από $-\infty$ έως $\ln\left(\frac{-1}{2a}\right)$ και μετά ελαττώνεται μέχρι το $-\infty$. Αν $a > -\frac{1}{2}$ η y' μηδενίζεται σε δύο θέσεις για $x = b$ και $x = c$. Όταν όμως το $a < -\frac{1}{2}$, η y' είναι πάντοτε θετική.

$a > 0$					
x	0		ξ		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	0	↘	min	↗	$+\infty$

$-\frac{1}{2} < a < 0$							
x	0		b		c		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	↘	min	↗	max	↘	$-\infty$

$a < -\frac{1}{2}$			
x	0		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	$-\infty$
y	0	↘	$+\infty$

Οι συναρτήσεις $y = y(x)\big|_{a=0}$ και $y = y(x)\big|_{a=-\frac{1}{2}}$ χωρίζουν το ημιεπίπεδο που καθορίζεται από τον άξονα $y'Oy$ και περιέχει τον ημιάξονα

$f''(x)=6x-6$, $f^{(3)}(x)=6$. Επομένως $f'(1)=3$, $f''(1)=0$, $f^{(3)}(1)=6$ και $f(1)=-1$. Άρα $f(x)=-1-3(x-1)+\frac{6}{6}(x-1)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=(x-1)^3-3(x-1)-1$.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε τους τύπους του ***Euler*** $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$ και $e^{-i\vartheta}=\cos\vartheta-i\sin\vartheta$, με $i=\sqrt{-1}$.

Λύση. Η συνάρτηση f με $f(\vartheta)=e^{iu}$, με $u=i\vartheta$, λόγω του αναπτύγματος:
$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$ με $x\in\mathbb{R}$, γράφεται:
$f(\vartheta)=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{4!}u^4+\frac{1}{5!}u^5+\frac{1}{6!}u^6+\ldots$.
Συνεπώς $f(\vartheta)=e^{i\vartheta}=1+(i\vartheta)+\frac{1}{2!}(i\vartheta)^2+\frac{1}{3!}(i\vartheta)^3+\frac{1}{4!}(i\vartheta)^4+\frac{1}{5!}(i\vartheta)^5+$
$+\frac{1}{6!}(i\vartheta)^6+\ldots=1+i\vartheta-\frac{1}{2!}\vartheta^2-\frac{1}{3!}i\vartheta^3+\frac{1}{4!}\vartheta^4+\frac{1}{5!}i\vartheta^5-\frac{1}{6!}\vartheta^6-\ldots=$
$=1+i\vartheta-\frac{1}{2!}\vartheta^2-\frac{1}{3!}i\vartheta^3+\frac{1}{4!}\vartheta^4+\frac{1}{5!}i\vartheta^5-\frac{1}{6!}\vartheta^6+\ldots=$
$=(1-\frac{1}{2!}\vartheta^2+\frac{1}{4!}\vartheta^4-\frac{1}{6!}\vartheta^6+\ldots)+i\,(\vartheta-\frac{1}{3!}\vartheta^3+\frac{1}{5!}\vartheta^5-\ldots)=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$.
Ακόμη για $u=-i\vartheta=i(-\vartheta)$ παίρνομε:
$e^{-i\vartheta}=\cos(-\vartheta)+i\sin(-\vartheta)\Rightarrow e^{-i\vartheta}=\cos\vartheta-i\sin\vartheta$.

Παρατήρηση. Αν στον τύπο $e^{xi}=\cos x+i\sin x$, θέσομε $x=\pi$ παίρνομε $e^{\pi i}=-1$ ή $e^{2\pi i}=1$, και γενικότερα αν θέσομε $x=2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$, έχομε $e^{2k\pi i}=1$, $\forall k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Επομένως η συνάρτηση f με τύπο $f(z)=e^z$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$, δεδομένου ότι ισχύει $e^z=e^{z+2\pi i}$.

Άσκηση 6. Να υπολογίστε το $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

Λύση. Επειδή $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots$ έπεται ότι $(\sin x-x)/x^3=$
$=-\frac{1}{x^3}(\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots)=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}x^2-\frac{1}{7!}x^4+\ldots\Rightarrow L=-1/6$.

Άσκηση 7. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σε σειρές.

Λύση.
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots)-(1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\ldots)}{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x+\frac{2}{3!}x^2+\ldots}{x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots}=\lim_{x\to0}\frac{2+\frac{1}{3}x+\ldots}{1-\frac{1}{6}x^2+\ldots}=2.$$

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε τον αριθμό $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan\sin x-\sin\tan x}{x^7}$.

Απόδειξη. Επειδή $\left\{\begin{array}{l}\tan\sin x=x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{107}{5040}x^7+O(x^9)\\ \sin\tan x=x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7+O(x^9)\end{array}\right\}$, προκύπτει

ότι $\tan\sin x-\sin\tan x=-\frac{107}{5040}x^7+\frac{55}{1008}x^7+O(x^9)=\frac{x^7}{30}+O(x^9)$.

Επομένως έχομε $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^7}\left(\frac{x^7}{30}+O(x^9)\right)\right)=\frac{1}{30}+\lim\limits_{x\to 0}O(x^2)=\frac{1}{30}$.

Αλλιώς. $$L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}-\sin\tan x}{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^7\cdot\tan^7 x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^7}_{=1}\cdot\lim_{\tan x=t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\sin t}{t^7}.$$

Από τις $\begin{cases} x\big/\sqrt{1+x^2}=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^5-\frac{5}{16}x^7+O(x^8)\\ \tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+O(x^8)\end{cases}$ προκύπτει ότι:

$$\tan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+\tfrac{167}{5040}x^7+O(x^8) \qquad (1)$$

Επίσης $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+O(x^8)$ (2)

Άρα $L=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\sin t}{t^7}\overset{(1),(2)}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{(\frac{167}{5040}t^7+\frac{1}{5040}t^7)+O(t^8)}{t^7}=\frac{1}{30}$.

Το $O(x^k)$: $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_kx^k+\ldots=a_0+a_1x+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+O(x^k)$ *ή*

$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}a_ix^i=\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}a_ix^i\right)+\sum\limits_{i=k}^{+\infty}a_ix^i=\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}a_ix^i\right)+O(x^k)$ *δηλ.* $O(x^k)=\sum\limits_{i=k}^{+\infty}a_ix^i$.

Άσκηση 9. **i)** Με την βοήθεια του τύπου του ***Taylor***, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_{>0}$.

ii) Να υπολογίσετε το $\sin 57.3°$ κατά προσέγγιση χιλιοστού.

Λύση. **i)** Πράγματι, $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots>1+x+\frac{1}{2}x^2$.

ii) Επειδή το τόξο πρέπει να εκφράζεται σε ακτίνια, θέτομε στον τύπο $\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots$, όπου $x=1$ και δεδομένου ότι 1rad περιέχεται μεταξύ των $57°$ και $58°$. Μία προσέγγιση είναι: $1\text{rad}=57°\,17'\,44''.3\simeq 57.3°$. Επομένως έχομε $\sin 57.3°=\sin 1^{\text{rad}}=$ $=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots=1-0.166+0.008=0.842$.

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή του $e^{0.1}$, χρησιμοποιώντας τους 4 πρώτους όρους του τύπου ***Taylor*** της e^x στο σημείο 0.

Απάντηση. Από τον τύπο $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{1}{n!}x^ne^{\theta x}$, με $0<\theta<1$, έχομε $e^{0.1}=1+0.1+\frac{1}{2!}(0.1)^2+\frac{1}{3!}(0.1)^3=1.10517$.

Άσκηση 11. Να αποδείξετε ότι $e^x>1+x>e^{x/(x+1)}$, $\forall x\in\mathbb{R}_{>0}$.

Απόδειξη. Από $e^x=1+\frac{1}{1!}x+R_2$ με $R_2=\frac{1}{2!}x^2e^{\theta x}>0$ προκύπτει η 1η ανισότητα.

Λύση. $J_1 = -\int \frac{1}{\sin^2 x}\, d(\operatorname{ctg} x) = -\int (\operatorname{ctg}^2 x + 1)\, d(\operatorname{ctg} x) =$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + c,\ x \in \mathbb{R}_{(0,\pi)}.$

Αλλιώς. $J_1 = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \operatorname{ctg}^2 x\, dx =$

$= -\int d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^2 x\, d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + c.$

Λύση. $J_2 = \left| \begin{array}{l} 1+\cos^2 x = t > 0 \\ \sin x \cdot \cos x\, dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2} t + c =$

$= \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}(1+\cos^2 x) + c.$

Αλλιώς. $J_2 = -\int \frac{\cos^2 x\, d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} = -\int \left((1+\cos^2 x) - 1\right) \cdot \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} =$

$= -\int d(1+\cos^2 x) + \int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} = -(1+\cos^2 x) + \ln(1+\cos^2 x) + c.$

Αλλιώς. $J_2 = -\frac{\cos^3 x\, d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{\cos x \cdot (1+\cos^2 x) - \cos x}{1+\cos^2 x}\, d(\cos x) =$

$= -\int \cos x\, d(\cos x) + \int \frac{\cos x\, d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} =$

$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + c.$

Λύση. $J_3 = \int \frac{dx}{(2\cos^2 \frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4}\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 \frac{x}{2} \cdot (1+\tan^2 x)\, dx =$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}\int (\tan^2 \frac{x}{2} + 1)\, d(\tan \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\tan^3 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}) + c = \frac{1}{6}\left(\tan^3 \frac{x}{2} + 3\tan \frac{x}{2}\right) + c.$

Λύση. $J_4 \overset{a^2 \neq b^2}{=} \int \frac{2(a^2-b^2)\sin x \cos x\, dx}{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} =$

$= \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{2a^2 \sin x \cos x - 2b^2 \sin x \cos x}{2\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\, dx =$

$= \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{(a^2\sin^2 x)' + (b^2\cos^2 x)'}{2\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\, dx =$

$= \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)'}{2\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\, dx = \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + c.$

Αλλιώς. Επειδή, $\sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{2(a^2-b^2)}$, έπεται ότι:

$J_4 \overset{a^2 \neq b^2}{=} \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{2\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + c.$

Άσκηση 46. Να υπολογίσετε το $J=\int\frac{dx}{a+\tan x}$, a πραγματική σταθερά.

Λύση.
$$J=\left|\begin{array}{l}\tan x=t,\quad \sec^2 x\,dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{\sec^2 x}=\dfrac{dt}{1+\tan^2 x}=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{(a+t)(1+t^2)}=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\int\left(\frac{1}{a+t}+\frac{a-t}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{1+a^2}\left(\int\frac{dt}{a+t}+a\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{1+t^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\left(\ln(a+t)+a\,\mathrm{Arctan}\,t-\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)+c=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\left(\ln(a+\tan x)+ax-\tfrac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)\right)+c=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\left(ax+\ln\frac{a+\tan x}{\sec x}\right)+c=\frac{ax+\ln(a\cos x+\sin x)}{1+a^2}+c.$$

Άσκηση 47. Να υπολογίσετε το $J=\int\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}\right)^2dx$, $x\in\mathbb{R}_{(0,\pi/2)}$.

Λύση.
$$J=\int\left(1+\frac{x}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}\right)^2dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow J=\int dx+\int\frac{2x}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}dx+\int\frac{x^2}{(-x+\mathrm{Arctan}\,x)^2}dx \qquad (1)$$

Η $\left(\frac{1}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}\right)'=-\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{(-x+\mathrm{Arctan}\,x)^2}=\frac{x^2}{(-x+\mathrm{Arctan}\,x)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$,

άρα $\int\frac{x^2}{(-x+\mathrm{Arctan}\,x)^2}dx=\int(1+x^2)\left(\frac{1}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}\right)'dx=$

$=\frac{1+x^2}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}-\int\frac{2x}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}dx$ και η σχέση (1) γίνεται

$$\int\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}\right)^2dx=x+\frac{1+x^2}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}+c=\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x+1}{-x+\mathrm{Arctan}\,x}+c.$$

Άσκηση 48. Να υπολογίσετε τα $I=\int\frac{x^{2000}}{x^{2668}+1}dx$ και $J=\int\frac{x^{666}}{x^{2668}+1}dx$, $x\in\mathbb{R}_{>0}$.

Λύση.
$$I+J=\int\frac{x^{2000}+x^{666}}{x^{2668}+1}dx=\int\frac{\frac{x^{2000}+x^{666}}{x^{1334}}}{\frac{x^{2668}+1}{x^{1334}}}dx=\int\frac{x^{666}+\frac{1}{x^{668}}}{x^{1334}+\frac{1}{x^{1334}}}dx=$$
$$=\int\frac{\frac{1}{x}\left(x^{667}+\frac{1}{x^{667}}\right)}{(x^{667})^2+\frac{1}{(x^{667})^2}}dx\overset{k=667}{=}\int\frac{x^k+\frac{1}{x^k}}{\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2+2}\cdot\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}x^k\equiv u,\ k=667\\ k\ln x=\ln u\\ \dfrac{dx}{x}=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{du}{u}\end{array}\right|=$$

Επιπλέον ισχύει $I-J=\int_{-2}^{2} x^4\cdot\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx$.

Η συνάρτηση όμως f με $f(x)=x^4\cdot\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ και το διάστημα ολοκληρώσεως συμμετρικό, άρα $I-J=0$.
Επειδή $I+J=64/5$ και $I-J=0$, συνάγεται ότι $I=32/5$.

Αλλιώς. $I\overset{x=-t}{=}\int_{2}^{-2}\frac{t^4}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_{-2}^{2}\frac{e^{t}\cdot t^4}{1+e^{t}}dt=\int_{-2}^{2}\frac{e^{x}\cdot x^4}{1+e^{x}}dx$. Άρα $2I=\int_{-2}^{2}x^4\,dx=\frac{32}{5}$.

Άσκηση 69. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J=\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x^2-2x+2}dx$.

Λύση. $J=\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{1+(x-1)^2}dx=\left|\begin{array}{c} x-1=\tan t\\ dx=(1+\tan^2 t)\,dt\\ dt=(1+(x-1)^2)^{-1}dx\end{array}\right|\overset{\star}{=}\int_{0}^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,dt=$

$=\left|\begin{array}{c} t=\frac{\pi}{4}-u\\ dt=-du\end{array}\right|=\int_{0}^{\pi/4}\ln\left(1+\tan(\tfrac{\pi}{4}-u)\right)du=\int_{0}^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=$

$=\int_{0}^{\pi/4}\ln\frac{2}{1+\tan u}du=\int_{0}^{\pi/4}\ln 2\,du-\int_{0}^{\pi/4}\ln(1+\tan u)\,du=\frac{\pi}{4}\ln 2-J\Rightarrow$

$\Rightarrow J=\frac{\pi}{4}\ln 2-J\Rightarrow J=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Αλλιώς. $J\overset{\star}{=}\int_{0}^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,dx=\int_{0}^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx=\int_{0}^{\pi/4}\ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}dx=$

$=\int_{0}^{\pi/4}\ln\left(\cos x+\sin x\right)dx-\int_{0}^{\pi/4}\ln\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c}\sin x+\cos x=\\ =\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\end{array}\right|=$

$=\int_{0}^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,dx+\int_{0}^{\pi/4}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{0}^{\pi/4}\ln\cos x\,dx=\left|\left(\begin{array}{c}x=t+\frac{\pi}{8}\Rightarrow\\ \Rightarrow dx=dt\end{array}\right),\right.$

$\left|\begin{array}{c|c|c}x & 0 & \pi/4\\ \hline t & -\pi/8 & \pi/8\end{array}\right|=\frac{\pi}{4}\cdot\ln\sqrt{2}+\int_{-\pi/8}^{\pi/8}\ln\sin\left(\frac{3\pi}{8}+t\right)dt-\int_{-\pi/8}^{\pi/8}\ln\cos\left(\frac{\pi}{8}+t\right)dt=$

$=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2+\int_{-\pi/8}^{\pi/8}\ln\frac{\sin(\frac{3\pi}{8}+t)}{\cos(\frac{\pi}{8}+t)}dt=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2+\int_{-\pi/8}^{\pi/8}\underbrace{\ln\frac{\cos(\frac{\pi}{8}-t)}{\cos(\frac{\pi}{8}+t)}}_{\text{περιττή}}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Ερώτημα. Μπορείτε να δικαιολογήσετε την χρησιμοποίηση του μετασχηματισμού $x=t+\frac{\pi}{8}$;

Άσκηση 70. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει θετική συνάρτηση f, συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_{\geq 0}$, που να ικανοποιεί την σχέση $f'(x)\geq f^2(x)$.

Απόδειξη. Με την υπόθεση ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση f, συνάγεται ότι:

$$\frac{1}{f(0)}=\int_{0}^{1/f(0)}dx\leq\int_{0}^{1/f(0)}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\left[-1/f(x)\right]_{0}^{1/f(0)}=$$

$=\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1/f(0))}<\frac{1}{f(0)}$, πράγμα που οδηγεί σε αδιέξοδο.

Άσκηση 77. **i)** Να αποδείξετε ότι κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα με πεπερασμένα άκρα a και b, είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σ' ένα άλλο ολοκλήρωμα με άκρα 0 και 1.

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}dx + 3\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx = 0$.

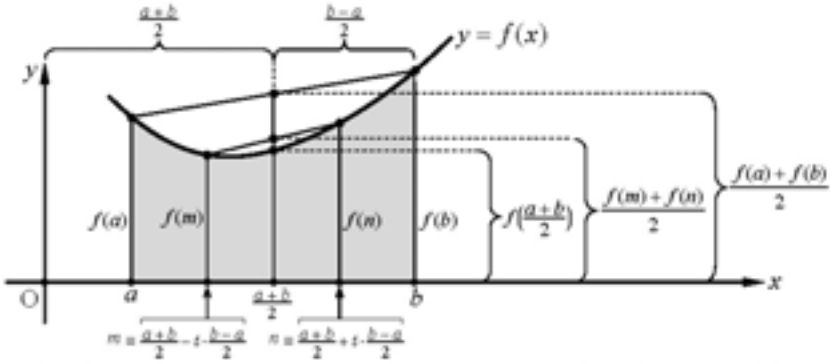
iii) Αν η $f:\mathbb{R}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και κυρτή, να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(Ανισότητα των ***Charles Hermite - Jacques Salomon Hadamard***).

Απόδειξη. **i)** Για $\begin{Bmatrix} x = pt+q \\ p,q \text{ σταθερές} \end{Bmatrix}$ έχομε $\begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = p\cdot 0 + q \\ b = p\cdot 1 + q \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} p = b-a \\ q = a \end{Bmatrix}$.

Επομένως $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t+a\big)dt$. (1)

ii) Μετασχηματίζομε κάθε ολοκλήρωμα σε άλλο με άκρα 0 και 1. Για $x=-t-4$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, έπεται ότι $dx=-dt$, οπότε $\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}dx = -\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt$. Για $x=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$ στο δεύτερο, έχομε $dx=\frac{1}{3}dt$ και $3\int_{1/2}^{2/3} e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx = \int_0^1 e^{(t-1)^2}dt$. Άρα $\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}dx + 3\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx = 0$.



iii) Δεδομένου ότι η σκιαγραφημένη επιφάνεια δεν είναι μεγαλύτερη από το εμβαδόν του ορθογωνίου τραπεζίου με παράλληλες πλευρές $f(a)$ και $f(b)$, είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ότι ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a) \Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Επιπλέον $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left(-\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right)$ (1)

Επειδή $\frac{-1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(x)dx \overset{\text{(i)}}{=} \frac{-1}{b-a}\cdot\left(a-\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 f\left(\left(a-\frac{a+b}{2}\right)t+\frac{a+b}{2}\right)dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(\tfrac{a+b}{2}-t\tfrac{b-a}{2}\right)dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 f(m)dt \qquad (2)$$

Αλλιώς. Η σχέση $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a) \Rightarrow f(\xi)\cdot(b-a) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(\xi) = 0$. Επειδή $f(\xi) \in [c,d]$ και άρα $c \le 0 \le d$ και $c \ne d$, έπεται ότι $c \le 0$, δηλαδή $c-2 \le -2 < 0 \Leftrightarrow 2-c > 2$ απ' όπου $(2-c)^2 > 4$. Από την $d \ge 0 \Rightarrow d+1 \ge 1 > 0 \Rightarrow (d+1)^2 \ge 1$.

Τελικώς $\underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{\ge 0} + (c-2)^2 + (d+1)^2 \ge \underbrace{(c-2)^2}_{>4} + \underbrace{(d+1)^2}_{\ge 1} > 1+4 = 5$.

Ασκηση 104. Αν η συνάρτηση $f:[0,a] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,a]$, ισχύει ότι $\int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du$.

Απόδειξη. Έχομε $\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du = \int_0^x (u)'\cdot\left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du =$

$= u\cdot\int_0^u f(t)\,dt\Big|_{u=0}^{u=x} - \int_0^x u\cdot f(u)\,du = x\cdot\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x u\cdot f(u)\,du =$

$= \int_0^x x\cdot f(u)\,du - \int_0^x u\cdot f(u)\,du = \int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du$.

Αλλιώς. Θέτομε $F(x) \equiv \int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du = x\cdot\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u\cdot f(u)\,du$

και $G(x) \equiv \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du$. Ισχύει $F(0) = G(0) = 0$, $F'(x) =$

$= \int_0^x f(u)\,du + x\cdot f(x) - x\cdot f(x) = \int_0^x f(u)\,du$ και $G'(x) = \int_0^x f(t)\,dt =$

$= \int_0^x f(u)\,du$. Επομένως $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in [0,a]$, δηλαδή $\{F(x) = G(x) + c \wedge F(0) = G(0)\} \Rightarrow c = 0$ κι άρα $F(x) = G(x)$.

Αλλιώς. Αν θέσομε $h(x) \equiv \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du - \int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du$, έπεται ότι:

$h'(x) = (\underbrace{\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right)}_{L'(u)} du)' - (\int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du)' =$

$= \left(L(x) - L(0)\right)' - \left(x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u\cdot f(u)\,du\right)' = \int_0^x f(t)\,dt -$

$-\left(x'\int_0^x f(u)\,du + x\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)\,du - \frac{d}{dx}\int_0^x u\cdot f(u)\,du\right) = \int_0^x f(t)\,dt -$

$-\left(\int_0^x f(u)\,du + x\cdot f(x) - x\cdot f(x)\right) = 0 \Rightarrow h(x) = c, c \in \mathbb{R}$ και με $h(0) =$

$= c = 0$ έχομε $h(x) = 0$, άρα $\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du = \int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du$.

Άσκηση 190. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_{[-a,a]}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και ολοκληρώσιμη, να αποδείξετε ότι $J=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx=\int_0^a f(x)\,dx$, όπου $k\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έχομε $J=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx=\int_0^a\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx+\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx=\left|\begin{array}{l}x=-t\\dx=-dt\end{array}\right|=$

$$=\int_0^a\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx-\int_a^0\frac{f(-t)}{e^{-kt}+1}dt=\int_0^a\frac{f(x)}{e^{kx}+1}dx+\int_0^a\frac{f(t)}{e^{-kt}+1}dt=$$

$$=\int_0^a\left(\frac{1}{e^{kx}+1}+\frac{1}{e^{-kx}+1}\right)f(x)\,dx=\int_0^a\frac{e^{kx}+1}{e^{kx}+1}f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$$

Εφαρμογή 1. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Εφαρμογή 2. $\int_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\int_{-1}^{1}\frac{(e^x+1)-1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx=$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\operatorname{Arctan}x\big|_{-1}^{1}-\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Εφαρμογή 3. $\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}-2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=$

$$=\operatorname{Arctan}x\big|_{-1}^{1}-2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{Arctan}1-\operatorname{Arctan}(-1)-2\operatorname{Arctan}1=0.$$

Άσκηση 191. Αν $a\in\mathbb{R}_{>0}$ και $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, να αποδείξετε ότι $J=\int_{1/a}^{a}\frac{1-x^{n-2}}{1+x^n}dx=0$.

Απόδειξη. $J=\left|\begin{array}{l}x=1/t\\dx=(-1/t^2)dt\end{array}\right|=-\int_a^{1/a}\frac{1-(1/t^{n-2})}{1+(1/t^n)}\cdot\frac{1}{t^2}dt=\int_{1/a}^{a}\frac{t^{n-2}-1}{t^n+1}\cdot\frac{t^n}{t^{n-2}}\cdot\frac{1}{t^2}dt=$

$$=-\int_{1/a}^{a}\frac{1-t^{n-2}}{1+t^n}dt=-J\Rightarrow J=-J\Rightarrow 2J=0\Rightarrow J=0.$$

Άσκηση 192. Να αποδείξετε ότι $J=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{\ln(2+x^2)}dx=0$.

Απόδειξη. $J=\int_{-1}^{0}\frac{\sin x}{\ln(2+x^2)}dx+\int_0^1\frac{\sin x}{\ln(2+x^2)}dx=J_1+J_2$ και $J_1=\int_{-1}^{0}\frac{\sin x}{\ln(2+x^2)}dx=$

$=\left|\begin{array}{l}x=-t\\dx=-dt\end{array}\right|=\int_0^1\frac{\sin t}{\ln(2+t^2)}dt=-J_2$. Επομένως $J=J_1+J_2=0$.

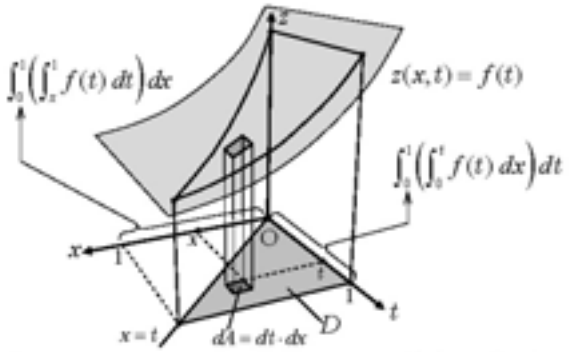
Αλλιώς. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή στο διάστημα $\mathbb{R}_{[-1,1]}$.

Άσκηση 193. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{1/e}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx=\frac{1}{e}$.

Από την δεδομένη ανισοτική σχέση $\int_x^1 f(t)\,dt \ge \frac{1}{2}(1-x^2)$ έπεται ότι:

$$\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)\,dt\right)dx \ge \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx \overset{(2)}{\Rightarrow} \int_0^1 x\,f(x)\,dx \ge \frac{1}{3} \qquad (3)$$

Τελικώς από (1), (3) $\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,dx \ge 2\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx - \frac{1}{3} \ge 2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.



Σχόλιο. Για την απόδειξη της (2), μπορούμε να κάνουμε χρήση διπλού ολοκληρώματος στο D.

Πράγματι $\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)\,dt\right)dx = \iint_D z(x,t)\,dx\,dt = \int_0^1\left(\int_0^t f(t)\,dx\right)dt =$

$$= \int_0^1 f(t)\cdot\left(\int_0^t dx\right)dt = \int_{t=0}^{t=1} t\cdot f(t)\,dt = \int_{x=0}^{x=1} x\,f(x)\,dx.$$

Άσκηση 247. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_{\ge 0}$, με συνεχή παράγωγο, $f(0)=0$ και $0 \le f'(x) \le 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \ge \int_0^x f^3(t)\,dt \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την F με τύπο $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Αρκεί και πρέπει να αποδείξομε ότι $F(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Έχομε $F'(x) = 2\int_0^x f(t)dt\cdot\underbrace{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}_{f(x)} - \underbrace{\left(\int_0^x f^3(t)\,dt\right)'}_{f^3(x)} =$

$$= f(x)\cdot\left(2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\right) \Rightarrow F'(x) = f(x)\cdot g(x) \qquad (1)$$

όπου g η συνάρτηση με τύπο $g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Επειδή $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_{\ge 0}$ και επομένως $f(x) \ge f(0) = 0$ δηλαδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ (2)

Είναι $g'(x) = 2f(x) - 2f(x)\cdot f'(x) = 2f(x)\left(1-f'(x)\right) \ge 0$ διότι $\{0 < f'(x) \le 1 \wedge f(x) \ge 0\}$, άρα η g είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}_{\ge 0}$ οπότε ισχύει:

Άσκηση 255. Να υπολογίσετε το $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)\varphi)}{\sin\varphi} d\varphi$, όπου $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(n) = \sin((2n+1)\varphi)/\sin\varphi$.

Έχομε $f(n+1) - f(n) = \frac{\sin((2n+3)\varphi) - \sin((2n+1)\varphi)}{\sin\varphi}$ και επειδή

$$\sin((2n+3)\varphi) - \sin((2n+1)\varphi) = \sin((2n+1)\varphi + 2\varphi) - \sin((2n+1)\varphi) =$$
$$= \sin((2n+1)\varphi)\cdot\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)\cdot\cos((2n+1)\varphi) - \sin((2n+1)\varphi) =$$
$$= \sin((2n+1)\varphi)\cdot(\cos(2\varphi) - 1) + \sin(2\varphi)\cdot\cos((2n+1)\varphi) =$$
$$= \sin((2n+1)\varphi)\cdot(-2\sin^2\varphi) + 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos((2n+1)\varphi) =$$
$$= 2\sin\varphi\left(\cos\varphi\cdot\cos((2n+1)\varphi) - \sin((2n+1)\varphi)\cdot\sin\varphi\right) =$$
$$= 2\sin\varphi\cdot\cos(\varphi + (2n+1)\varphi) = 2\sin\varphi\cdot\cos((2n+2)\varphi)$$ προκύπτει ότι:

$f(n+1) - f(n) = 2\cos((2n+2)\varphi)$.

Άρα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(n+1)\, d\varphi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(n)\, d\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos((2n+2)\varphi)\, d\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(n+1)\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(n)\, d\varphi = \ldots = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(0)\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 0.$$

Τελικώς συνάγεται ότι $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)\varphi)}{\sin\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(n)\, d\varphi = 0$.

Άσκηση 256. **i)** Αν η συνεχής συνάρτηση f πληροί την σχέση $f(x) + f(2a-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\int_0^{2a} f(x)\, dx$.

ii) Να βρεθεί το πεδίον ορισμού της συναρτήσεως f με τύπο:

$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(6-x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(2+x)}}$ και να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)\, dx$.

Λύση. **i)** Από την $f(x) + f(2a-x) = 1 \Rightarrow \int_0^{2a} f(x)\, dx + \int_0^{2a} f(2a-x)\, dx = 2a \quad (1)$

Επειδή $\int_0^{2a} f(2a-x)\, dx = \left| \begin{array}{l} 2a - x = t \\ \Rightarrow -dx = dt \end{array} \right| = -\int_{2a}^{0} f(t)\, dt =$

$= \int_0^{2a} f(x)\, dx$, η (1) γίνεται $\int_0^{2a} f(x)\, dx = a$. **ii)** Πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 6-x>0 \\ \ln(6-x)\geq 0 \\ 2+x>0 \\ \ln(2+x)\geq 0 \\ \sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(2+x)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ x\leq 5 \\ x>-2 \\ x\geq -1 \\ \ln(6-x)\neq 0 \\ \ln(2+x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ x\leq 5 \\ x>-2 \\ x\geq -1 \\ x\neq 5 \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ x<5 \\ x>-2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Άσκηση 260. **i)** Να υπολογίσετε το $J=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$ με βάση τον $\mathrm{M}: x=\frac{1-u}{1+u}$.

ii) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f πληροί την ανισοτική σχέση:

$$2\pi\ln|x-1|<f(x)<2\pi\ln|x+1|,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}_{>0}.$$

Λύση. **i)** Θέτομε $x=\frac{1-u}{1+u}$ οπότε $dx=-\frac{2du}{(1+u)^2}$ και $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 0 & 1\\ \hline u & 1 & 0\\ \hline\end{array}$.

Το $J=-\int_1^0 \frac{\ln(\frac{1-u}{1+u}+1)}{(\frac{1-u}{1+u})^2+1}\cdot\frac{2\,du}{(1+u)^2}=\int_0^1 \frac{(1+u)^2\cdot\ln(\frac{2}{1+u})}{(1-u)^2+(1+u)^2}\cdot\frac{2\,du}{(1+u)^2}=$

$$=\int_0^1 \frac{(1+u)^2\ln\frac{2}{1+u}}{2(1+u^2)}\cdot\frac{2\,du}{(1+u)^2}=\int_0^1 \frac{\ln 2-\ln(1+u)}{1+u^2}du=\ln 2\cdot\int_0^1\frac{du}{1+u^2}-$$

$$-\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}du=\ln 2\cdot\int_0^1\frac{du}{1+u^2}-J\Rightarrow J=\frac{\ln 2}{2}\cdot\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi\ln 2}{8}.$$

Αλλιώς. **i)** Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(t)=\int_0^1\frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}dx$, για την οποία ισχύει $f(0)=0$, γεγονός που σημαίνει ότι θα είναι $f(1)=J$.

Έχομε $f'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{d}{dt}\big(\ln(xt+1)\big)dx=$

$$=\int_0^1\frac{x}{(xt+1)(x^2+1)}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{x+t}{x^2+1}-\frac{t}{xt+1}\right)dx=\frac{1}{1+t^2}\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx+$$

$$+\frac{t}{1+t^2}\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}-\frac{t}{1+t^2}\int_0^1\frac{dx}{xt+1}=\left[\frac{\ln(x^2+1)}{2(1+t^2)}+\frac{t\,\mathrm{Arctan}\,x}{1+t^2}-\frac{\ln(xt+1)}{1+t^2}\right]_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{t\pi+2\ln 2-4\ln(t+1)}{4(1+t^2)}\Rightarrow f'(t)=\frac{t\pi+2\ln 2-4\ln(t+1)}{4(1+t^2)}\ \text{και άρα}$$

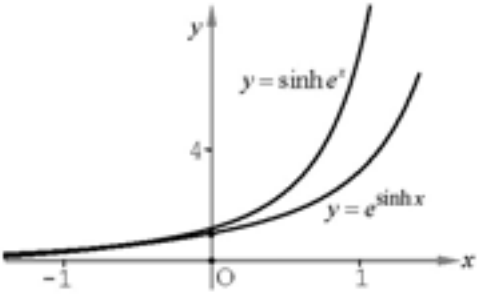
$$\underbrace{f(1)}_{=J}-\underbrace{f(0)}_{=0}=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{t\,dt}{1+t^2}+\frac{\ln 2}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{8}\ln(1+t^2)\Big|_{t=0}^{t=1}+$$

$$+\frac{\ln 2}{2}\mathrm{Arctan}(t)\Big|_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\ln(t+1)\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi\ln 2}{8}+\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-f(1)\ \text{με}\ f(1)=J.$$

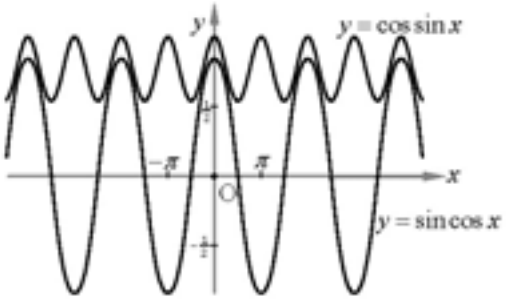
Τελικώς $J=\frac{1}{4}\pi\ln 2-J$ και επομένως είναι $J=\frac{1}{8}\pi\ln 2$.

Σχόλιο. *Η μεθοδολογία της εισαγωγής μιας παραμέτρου και στην συνέχεια, παραγώγιση με βάση τον κανόνα του* ***Leibniz****, ήταν ιδιαιτέρως προσφιλής μέθοδος του νομπελίστα Φυσικού* ***Richard Feynman****, ο οποίος για τον κανόνα του* ***Leibniz*** *έλεγε: «Ακόμη και στους δικούς μου τρόπους, που έχω αναπτύξει για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, χρησιμοποιούσα αυτό το διαβολεμένο εργαλείο ξανά και ξανά».*

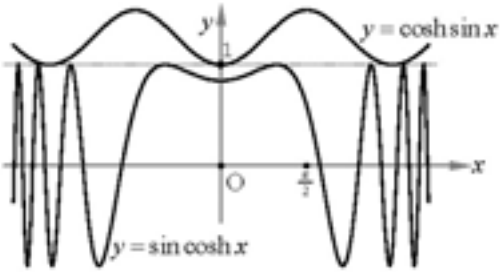
Υπενθύμιση. $\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)}\sigma(t,x)\,dt=\int_a^b\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt+\frac{\partial b}{\partial x}\cdot\sigma(b,x)-\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\sigma(a,x)$ *(Κανόνας του* ***Leibniz****).*



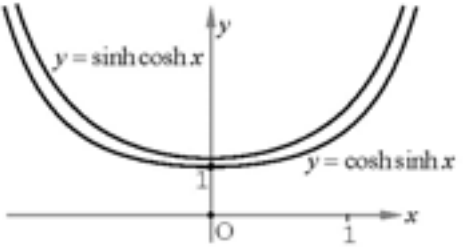
v) $\sinh e^x > e^{\sinh x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$



vi) $\sin\cos x < \cos\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$



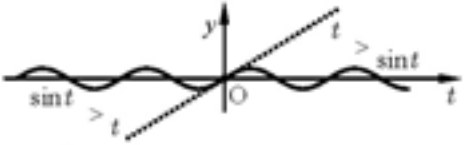
vii) $\sin\cosh x < \cosh\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$



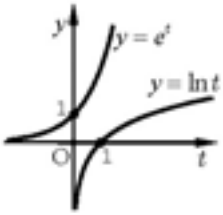
viii) $\sinh\cosh x > \cosh\sinh x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Εκφάνηση: **i)** Αν $x \in \mathbb{R}_{(0,\pi]}$ να αποδείξετε ότι $\sin\ln x > \ln\sin x$.

Υπενθύμιση.



$$\begin{cases} t > \sin t, & \text{αν } t \in \mathbb{R}_{>0} \\ t = \sin t, & \text{αν } t = 0 \\ t < \sin t, & \text{αν } t \in \mathbb{R}_{<0} \end{cases} \qquad (1)$$

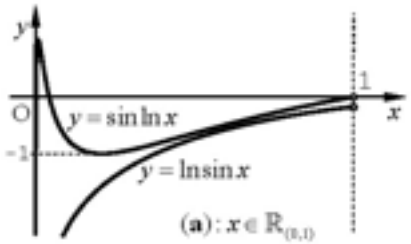


$$\left.\begin{array}{l}\text{Η συνάρτηση } y = e^t \\ \text{είναι } \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ t_1 \gtreqless t_2 \Rightarrow e^{t_1} \gtreqless e^{t_2}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

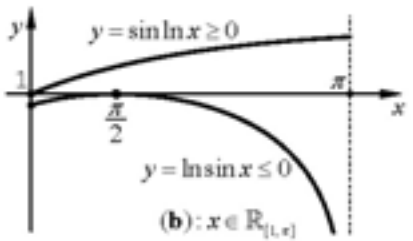
$$\left.\begin{array}{l}\text{Η συνάρτηση } y = \ln t \\ \text{είναι } \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}_{>0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{>0} \\ t_1 \gtreqless t_2 \Rightarrow \ln t_1 \gtreqless \ln t_2\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Απόδειξη. **a)** Για $x \in \mathbb{R}_{(0,1)}$ ισχύει ότι $u \equiv \ln x < 0$ άρα $\sin u \overset{(1)}{>} u \overset{(2)}{\Rightarrow} e^{\sin u} > e^u \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\sin\ln x} > e^{\ln x} \Rightarrow e^{\sin\ln x} > x \overset{(1)}{>} \sin x \overset{(3)}{\Rightarrow} \ln e^{\sin\ln x} > \ln x > \ln\sin x$ και επομένως η $\sin\ln x > \ln\sin x$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}_{(0,1)}$.



(a): $x \in \mathbb{R}_{(0,1)}$



(b): $x \in \mathbb{R}_{[1,\pi]}$