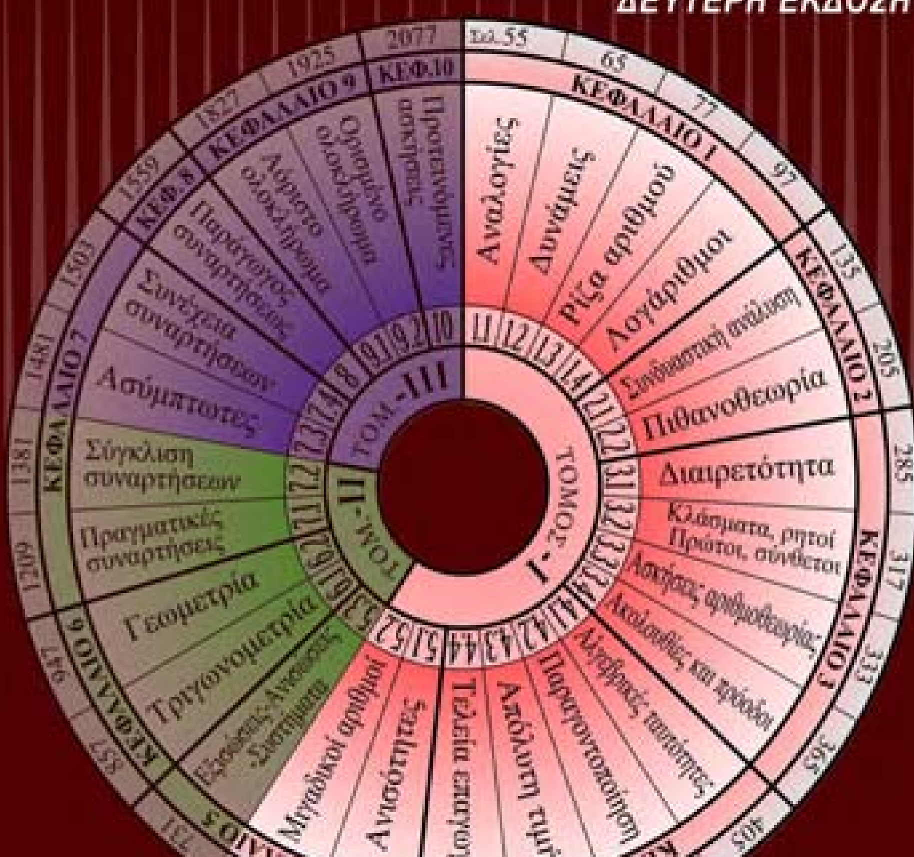
ΤΟΜΟΣ Ι

ΟΥΣΙΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

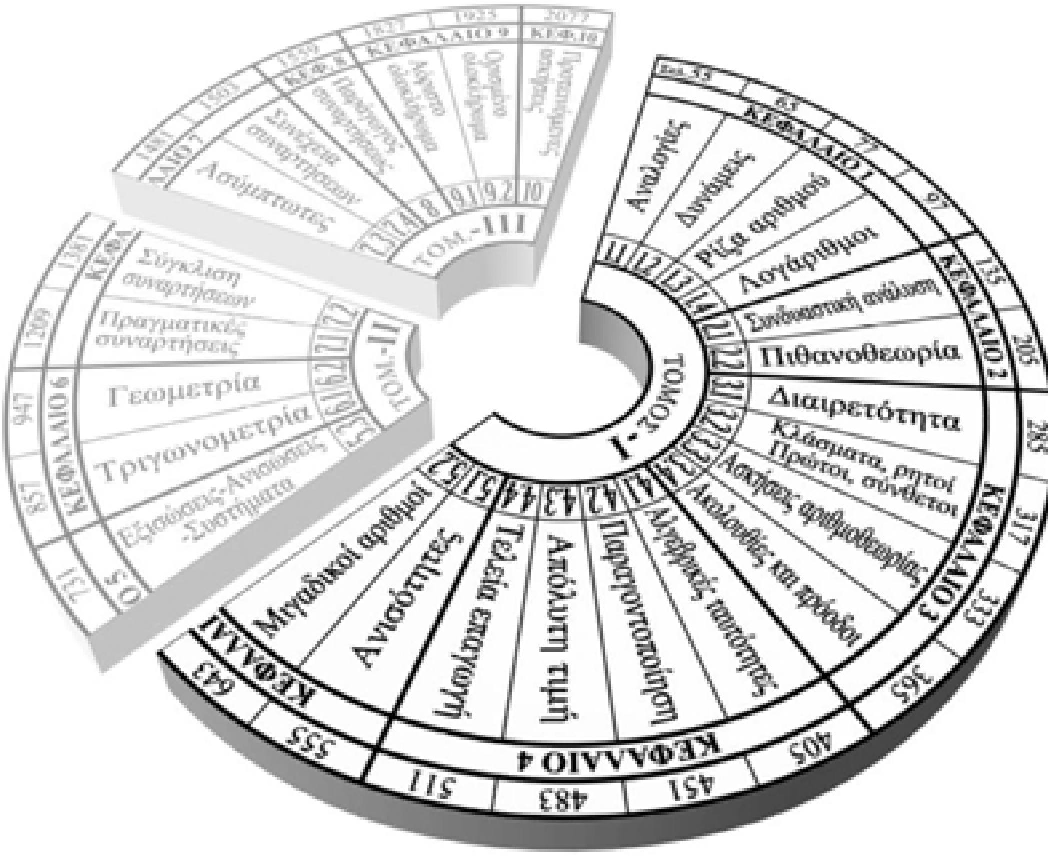
ΜΑΝΟΛΗΣ Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ Ν. ΜΕΤΑΞΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

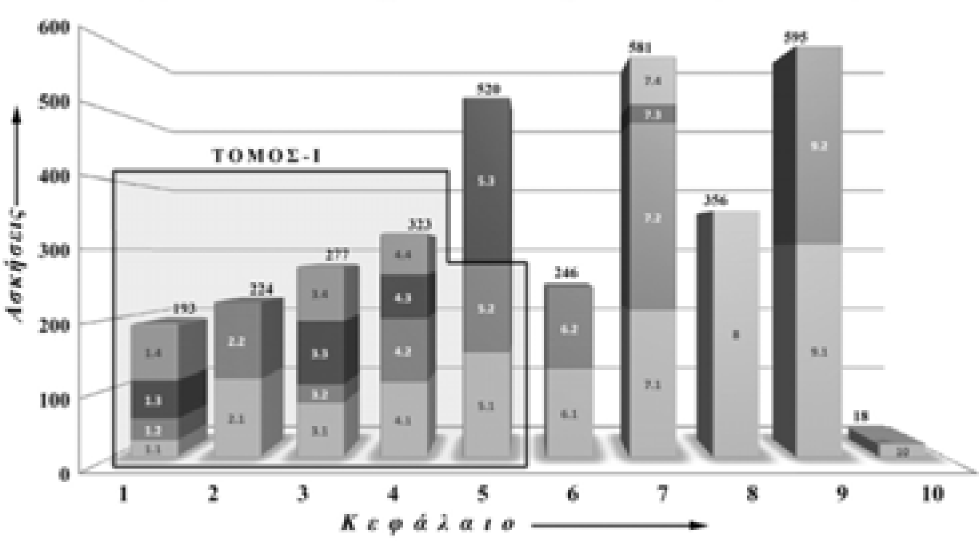


ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ

ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ



Κατανομή των 3333 τουλάχιστον, υποδειγματικώς λυμένων ασκήσεων:



🕮 ΤΟΜΟΣ - I

Η παραπάνω διαδικασία, βασίζεται στην παρακάτω ταυτότητα:

$$a^2 \equiv (a-\delta)(a+\delta)+\delta^2 \Rightarrow \begin{tikzcd} & \boxed{a-\delta} \arrow[dr] & \\ a^2 \arrow[ur, "-\delta"] \arrow[dr, "+\delta"'] & & \boxed{(a-\delta)(a+\delta)}+\delta^2=\ldots \\ & \boxed{a+\delta} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Εφαρμογή 1.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{18} \arrow[dr] & \\ 19^2 \arrow[ur, "-1"] \arrow[dr, "+1"'] & & \boxed{18\times 20}+1^2=360+1=361 \Rightarrow 19^2=361. \\ & \boxed{20} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Εφαρμογή 2.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{24} \arrow[dr] & \\ 27^2 \arrow[ur, "-3"] \arrow[dr, "+3"'] & & \boxed{24\times 30}+3^2=720+9=729 \Rightarrow 27^2=729. \\ & \boxed{30} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Εφαρμογή 3.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{950} \arrow[dr] & \\ 975^2 \arrow[ur, "-25"] \arrow[dr, "+25"'] & & \boxed{950\times 1000}+25^2=950000+625 \Rightarrow 975^2=950625. \\ & \boxed{1000} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \boxed{20} \arrow[dr] & \\ 25^2 \arrow[ur, "-5"] \arrow[dr, "+5"'] & & \boxed{20\times 30}+5^2=600+25=625 \\ & \boxed{30} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση. Μια εξαιρετικά χρηστική μέθοδος, για αριθμούς κοντά στον αριθμό 50, είναι η εξής: Το τετράγωνο ενός αριθμού $n \in \mathbb{N}_{[25,75]}$ είναι ίσο με τον τετραψήφιο αριθμό που τα δύο πρώτα του ψηφία είναι ο αριθμός $n-25$, και τα δύο τελευταία $(50-n)^2$.

Π.χ.: $\mathbf{52}^2=\{[\mathbf{52}-25][(50-\mathbf{52})^2]\}=\{[27][04]\}=2704$

$\mathbf{41}^2=\{[\mathbf{41}-25][(50-\mathbf{41})^2]\}=\{[16][81]\}=1681.$

$\mathbf{56}^2=\{[\mathbf{56}-25][(50-\mathbf{56})^2]\}=\{[31][36]\}=3136$

$\mathbf{47}^2=\{[\mathbf{47}-25][(50-\mathbf{47})^2]\}=\{[22][09]\}=2209$

Αν $(50-n)^2 \geq 100$, μεταφέρομε τις εκατοντάδες στο πρώτο διψήφιο τμήμα.

$\mathbf{35}^2=\{[\mathbf{35}-25][(50-\mathbf{35})^2]\}=\{[10][15^2]\}=\{[10][225]\}=1225$

$\mathbf{63}^2=\{[\mathbf{63}-25][(50-\mathbf{63})^2]\}=\{[38][13^2]\}=\{[38][169]\}=3969$

Πράγματι, η $n^2=100(n-x)+(2x-n)^2 \Leftrightarrow (x-25)(x-n)=0$ γίνεται ταυτότητα για $x=25$, δηλαδή ισχύει $n^2 \equiv 100(n-25)+(50-n)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο. Βλέπε κεφ. 6 του βιβλίου «Πιο φτηνά με τη ντουζίνα» από τους Frank Bunker Gilbreth, Jr. and Ernestine Gilbreth, μετάφρ. Δ.Οικονομίδης, έκδ. Πεχλιβανίδης 1948.

15) Για την εύρεση του κύβου ακεραίου και θετικού αριθμού ισχύει:

$$\text{Επιπλέον } \left\{\begin{matrix} 5^{4004} = (5^4)^{1001} = 625^{1001} \\ < \\ 3^{6006} = (3^6)^{1001} = 729^{1001} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \min(3^{6006}, 5^{4004}) = 5^{4004} \quad (2)$$

Επειδή $2^{3003} = (2^3)^{1001} = 8^{1001} > 7^{1001} \Rightarrow \max(2^{3003}, 7^{1001}) = 2^{3003}$ (3)

Από τις (1),(2),(3)$\Rightarrow$(E) $\Leftrightarrow n(n+1) = 5^{2002} - 2^{3003} + 5^{4004} + 2^{3003} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n(n+1) = 5^{2002} + 5^{4004} \Leftrightarrow n(n+1) = 5^{2002}(1+5^{2002}) \Leftrightarrow n = 5^{2002}$.

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το εξαγόμενο:

$$A = (|3^{39} - 2^{65}| + 3^{2001} \cdot 27^{-654}) \cdot (-8^{-20}) + \sqrt{3969} + \sqrt{(4\sqrt{3}-7)^2} + \sqrt{48}.$$

Λύση. $\{3^{39} = 3^{3\cdot 13} = (3^3)^{13} = 27^{13},\ 2^{65} = 2^{5\cdot 13} = (2^5)^{13} = 32^{13}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 27^{13} < 32^{13} \Rightarrow 3^{39} < 2^{65} \Rightarrow |3^{39} - 2^{65}| = 2^{65} - 3^{39}$.

Επομένως $A = (2^{65} - 3^{39} + 3^{2001-1962}) \cdot (-2^{-60}) + 63 + 7 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

$= (2^{65} - 3^{39} + 3^{39}) \cdot (-2^{-60}) + 70 = -2^5 + 70 = 38$.

Άσκηση 12. Να αποδείξετε ότι $\mathscr{A} = 2001^1 + 2001^2 + \ldots + 2001^{2000} =$ πολ1000.

Απόδειξη. $\mathscr{A} = (2000+1)^1 + (2000+1)^2 + (2000+1)^3 + \ldots + (2000+1)^{2000} =$

$= \text{πολ}2000 + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2000} = 2000k + 2000 = 2\cdot 1000(k+1) = \text{πολ}1000$.

Παρατήρηση. Από την $(a+b)^n \equiv \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$ προκύπτει:

$$(2000+1)^n \equiv \underbrace{2000^n + \binom{n}{1}2000^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}2000^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n-1}2000}_{\text{πολ}2000} + 1.$$

Άσκηση 13. Να επιλυθεί στο $\mathbb{Q}$ η εξίσωση $x \cdot 2^{2012} = \dfrac{2^{2012} - 1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2011}}}$.

Λύση. Αν $S \equiv 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{2011}}$ έπεται ότι $2S = 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{2010}}$,

επομένως $S = 2S - S = 2 - \dfrac{1}{2^{2011}} = \dfrac{2^{2012} - 1}{2^{2011}}$ και τελικώς η δεδομένη

εξίσωση γίνεται $x \cdot 2^{2012} = \left(2^{2012} - 1\right) \cdot \dfrac{2^{2011}}{2^{2012} - 1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Άσκηση 14. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ και $B = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 2}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Λύση. Για $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \Rightarrow (-1)^n = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{n^2}$, $B = \dfrac{1}{n^2 + 2}$.

iv) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$, εξαιτίας της $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$, $x\neq y$.

v) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{ab^{n-1}}{b^n}}=\dfrac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$, για κάθε $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$.

vi) $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+b}\simeq a+\dfrac{b}{2a}$, όπου $a,b\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ και a^2 είναι το τετράγωνο του φυσικού αριθμού που ευρίσκεται πλησιέστερα στον A και b είναι το υπόλοιπο.

Π.χ.: $\sqrt{56}=\sqrt{7^2+7}\simeq 7+\frac{7}{14}=7.5$ $\quad(\sqrt{56}=7.4833...)$.

Σχόλιο. *Αν ο αριθμός $a^2\pm b=A\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ με $a,b\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, δεν είναι τέλειο τετράγωνο και a^2 είναι το πλησιέστερο τετράγωνο που προσεγγίζει τον A (κατά περίπτωση εκ των άνω ή εκ των κάτω) τότε ισχύει: $a\pm\dfrac{b}{2a}>\sqrt{a^2\pm b}>a\pm\dfrac{b}{2a\pm 1}$ (**Αρχιμήδης** 287-212 π.Χ.).*

Π.χ.: $\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{=1.5}>\underbrace{\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}}_{=1.414}>\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{=1.333}$, $\qquad\underbrace{2-\frac{1}{4}}_{=1.75}>\underbrace{\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}}_{=1.732}>\underbrace{2-\frac{1}{3}}_{=1.666}$,

$\underbrace{7+\frac{1}{14}}_{=7.0714}>\underbrace{\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}}_{=7.0711}>\underbrace{7+\frac{1}{15}}_{=7.0667}$, $\qquad\underbrace{8-\frac{3}{16}}_{=7.8125}>\underbrace{\sqrt{61}=\sqrt{8^2-3}}_{=7.8102}>\underbrace{8-\frac{3}{15}}_{=7.8}$.

vii) Αν η προσέγγιση (**vi**) δεν είναι ικανοποιητική, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sqrt{a^2+b}\simeq a+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{b^2}{8a^3}$ και για καλύτερες προσεγγιστικές τιμές τον

$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\underset{-1<x<1}{=}1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n}x^n+...$

Π.χ.: $\sqrt{85}\simeq 9+\dfrac{4}{2\cdot 9}-\dfrac{4^2}{8\cdot 9^3}\simeq 9.21948$ $(\sqrt{85}=9.21954...)$.

viii) Για την νιοστή ρίζα, ισχύει ο τύπος:

$$\sqrt[n]{a^n+b}=a\cdot\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}\simeq a\left(1+\frac{b}{n\cdot a^n}\right)=a+\frac{b}{n\cdot a^{n-1}}.$$

Π.χ.: $\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{2^5+2}\simeq 2+\dfrac{2}{5\cdot 2^4}=\dfrac{162}{80}=2.025$ $\left(\sqrt[5]{34}=2.02439...\right)$.

$\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{5^3+6}\simeq 5+\dfrac{6}{3\cdot 5^2}=5.08$ $\left(\sqrt[3]{131}=5.07875307...\right)$.

1.3.8 Διασαφήσεις με παραδείγματα

1. $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=2\sqrt[4]{3}$.

2. $\sqrt[3]{96}=\sqrt[3]{2^5\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 12}=2\sqrt[3]{12}$.

3. $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$.

4. $-2\sqrt{3}\neq\sqrt{(-2)^2\cdot 3}$.

5. $-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\cdot 3}=-\sqrt{12}$.

Αν $b\in\mathbb{R}_{>0}$ και $a\in\mathbb{R}_{<0}$, ισχύει $a\sqrt{b}=-(-a)\sqrt{b}=-\sqrt{(-a)^2\cdot b}=-\sqrt{a^2b}$.

$$\le \frac{2bc}{\sqrt{2bc}\left(\sqrt{2bc}+2\sqrt{bc}\right)} = \frac{2bc}{2bc+2\sqrt{2bc}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{4}{4+4\sqrt{2}} < \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}.$$

Άσκηση 37. Να αποδείξετε ότι ο $S=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{2010+\sqrt{2011}}}}}<2$.

Επειδή για κάθε $k\in\mathbb{N}$, ισχύει διαδοχικώς:

$$k=\sqrt{k^2} \overset{+k^2-k}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k^2=k^2-k+\sqrt{k^2} \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}} \overset{+k^2-k}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k^2=k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}} \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}}} \overset{+k^2-k}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k^2=k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}}} \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}}}} \overset{+k^2-k}{\Rightarrow} \ldots \quad \text{κ.τ.λ.},$$

συμπεραίνομε ότι για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών ισχύει η ταυτότητα $k\equiv\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\ldots+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2}}}}}}$.

Για $k=46$ και πλήθος ριζικών 2008, συνεπάγεται ότι:

$$46\equiv\sqrt{\underbrace{2070}_{>4}+\sqrt{\underbrace{2070}_{>5}+\ldots+\sqrt{\underbrace{2070}_{>2008}+\sqrt{\underbrace{2070}_{>2009}+\sqrt{\underbrace{2070}_{>2010}+\sqrt{\underbrace{2116}_{>2011}}}}}}}>$$

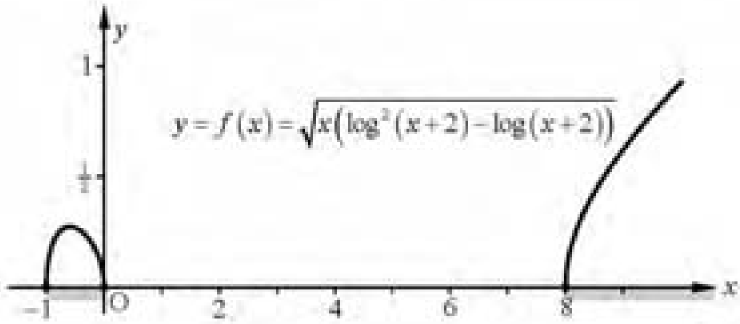
$$>\sqrt{4+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{2008+\sqrt{2009+\sqrt{2010+\sqrt{2011}}}}}}=\sigma\Rightarrow\sigma<46\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+\sigma<49\Rightarrow\sqrt{3+\sigma}<7\Rightarrow 2+\sqrt{3+\sigma}<9\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{3+\sigma}}<3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sigma}}<4\Rightarrow S=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sigma}}}<2.$$

Σχόλιο. *Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}}$ είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}_{\ge 0}$, δεδομένου ότι* $f'(x)=\dfrac{1}{8\sqrt{3+x}\sqrt{2+\sqrt{3+x}}\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}}}>0$.

Επομένως η σχέση $\sigma<46\Rightarrow S=f(\sigma)<f(46)=2\Rightarrow S<2$.



Άσκηση 54. Να αποδείξετε ότι $\log(n+1) > \frac{3}{10n} + \log n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Απόδειξη. Αρκεί ($\Leftarrow$) $\log(n+1) - \log n > \frac{3}{10n} \Leftarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{3}{10} \Leftarrow$

$\Leftarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 10^{\frac{3}{10}}$, που ισχύει δεδομένου ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$

$= 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \ldots > 2$ και συνεπώς $2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 2^7 > 5^3 \Leftrightarrow 128 > 125$.

Αλλιώς. Έχομε $(n+1)^n = n^n + n \cdot n^{n-1} + \ldots = 2 \cdot n^n + \ldots \Rightarrow (n+1)^n > 2 \cdot n^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{(n+1)^{10n} > 2^{10} \cdot n^{10n} \ \wedge \ 2^{10} = 1024 > 1000\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)^{10n} > 1000 n^{10n} \Rightarrow \log(n+1) > \frac{3}{10n} + \log n$.

Άσκηση 55. Αν $\log_{30} 5 = a$, να υπολογίσετε τον $\log_{30}(7.2)$ συναρτήσει του a.

Λύση. Είναι $\log_{30}(7.2) = \log_{30}\dfrac{36}{5} = -\log_{30} 5 + \log_{30} 36 = -a + 2\log_{30} 6$.

Θέτομε $\log_{30} 6 = b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 = 30^b \\ 5 = 30^a \end{array}\right\} \Rightarrow 30 = 30^{a+b} \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \log_{30} 6 = 1 - a$. Συνεπώς $\log_{30}(7.2) = -a + 2(1-a) = 2 - 3a$.

Άσκηση 56. Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{2} + 1$.

Απόδειξη. Είναι $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} = \sqrt{\log_2 3} + \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}} < \sqrt{\log_2 4} + \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 2}} =$

$= \sqrt{2} + 1$. Επιπλέον $\dfrac{\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 3} + \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}}\right) \geq$

$\geq \sqrt{\sqrt{\log_2 3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}}} = 1$. Επειδή $\sqrt{\log_2 3} \neq \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$, δεν ισχύει το

ίσον, επομένως $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}\right) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} > 2$.

$=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}-\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$. Επειδή οι αριθμοί $\binom{2n}{n}$, $\binom{2n}{n-1}$ είναι ακέραιοι, συνάγεται ότι και ο αριθμός $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ είναι ακέραιος.

Δσκηση 83. Να υπολογίσετε το $S=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$, όπου $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$.

Λύση. Θέτομε $f_k\equiv\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$, $g_k\equiv\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}$ και υπολογίζομε την διαφορά

$$g_k-g_{k+1}=\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}-\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}=\frac{n!(2n-k)!}{(2n)!(n-k)!}-\frac{n!(2n-k-1)!}{(2n)!(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{n!(2n-1-k)!}{(n-k)!(2n-1)!}\left(\frac{2n-k}{2n}-\frac{n-k}{2n}\right)=\frac{\binom{n}{k}}{2\binom{2n-1}{k}}=\tfrac{1}{2}f_k,$$ οπότε έχομε:

$$\left.\begin{cases} k=0 & g_0-g_1=\frac{1}{2}f_0\\ k=1 & g_1-g_2=\frac{1}{2}f_1\\ k=2 & g_2-g_3=\frac{1}{2}f_2\\ \quad\vdots & \\ k=n-1 & g_{n-1}-g_n=\frac{1}{2}f_n\end{cases}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} g_0-g_n=\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f_k=\tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}f_k}_{S}-\tfrac{1}{2}f_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=2g_0+f_n-2g_n=2\frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n}{0}}+\frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n-1}{n}}-2\frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n}{n}}=2+\frac{1}{\binom{2n-1}{n}}-\frac{2}{\binom{2n}{n}}=$$

$$=2+\frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}\cdot\frac{2n}{2n}-2\frac{(n!)^2}{(2n)!}=2+2\frac{(n!)^2}{(2n)!}-2\frac{(n!)^2}{(2n)!}=2.$$

Δσκηση 84. Πενήντα άτομα εικοσιπέντε αγόρια και εικοσιπέντε κορίτσια κάθονται γύρω από ένα τραπέζι. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι απέναντι από ένα κορίτσι.

ii) Υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα πενήντα, που κάθεται μεταξύ δύο κοριτσιών.

Λύση. **i)** Αν δεν υπήρχε κανένα αγόρι απέναντι (αντιδιαμετρικά) από κορίτσι τότε θα έπρεπε απέναντι από κάθε αγόρι να βρισκόταν αγόρι και άρα ο αριθμός των αγοριών θα ήταν άρτιος, πράγμα αδύνατον.

ii) Ισοδύναμα με το ζητούμενο είναι να αποδείξομε ότι υπάρχουν πάντα δύο κορίτσια που τα χωρίζει μία μόνο θέση. Αρκεί ($\Leftarrow$) λοιπόν να αποδείξομε ότι δεν ισχύει το αντίθετο (δηλαδή είναι αδύνατον να μην υπάρχουν δύο κορίτσια από τα 25, που να τα χωρίζει μία μόνο θέση).

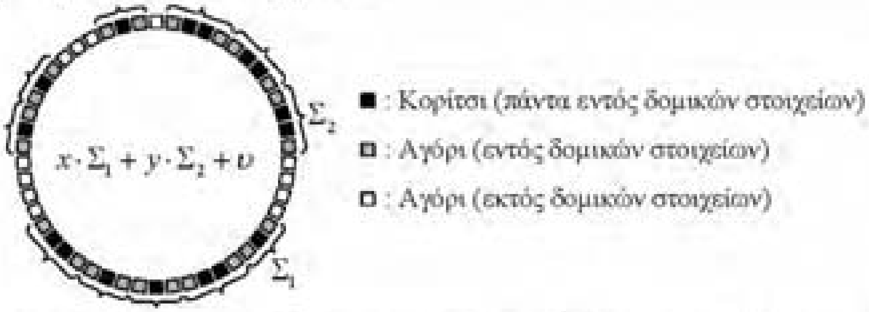
Συμβολίζομε με Α την θέση με αγόρι, Κ την θέση με κορίτσι. Αν δεν υπάρχουν δύο κορίτσια που να τα χωρίζει μία μόνο θέση, η δομή του τραπεζιού θα είναι της μορφής:

…ΑΑΑΑ ΑΚΑ ΑΚΑ ΑΑΑ ΑΚΚΑ ΑΚΑ ΑΑΑΑ ΑΚΚΑ ΑΑΑΑΑ…

Παρατηρούμε ότι αριστερά και δεξιά από κάθε ένα ή από κάθε δύο κορίτσια πρέπει να υπάρχουν αγόρια:

$$\ldots\mathrm{AAAA}\ \underbrace{\mathrm{AKA}}_{\Sigma_1}\ \underbrace{\mathrm{AKA}}_{\Sigma_1}\ \mathrm{AAA}\ \underbrace{\mathrm{AKKA}}_{\Sigma_2}\ \underbrace{\mathrm{AKA}}_{\Sigma_1}\ \mathrm{AAAA}\ \underbrace{\mathrm{AKKA}}_{\Sigma_2}\ \mathrm{AAAAA}\ldots$$

δηλαδή το τραπέζι θα αποτελείται από δομικά στοιχεία (διατεταγμένα σύνολα) της μορφής $\Sigma_1 \equiv \{\mathrm{AKA}\}$, $\Sigma_2 \equiv \{\mathrm{AKKA}\}$ και ένα συμπλήρωμα υ μόνο αγοριών.



Αν οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{N}$ με $x+y \neq 0$, υποδηλώνουν το πλήθος των δομικών στοιχείων Σ_1, Σ_2 αντιστοίχως, με τα οποία συμπληρώνεται το τραπέζι και $\upsilon \in \mathbb{N}$ τις υπόλοιπες θέσεις αγοριών που απομένουν, ισχύει: $x\cdot\underbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{K}+\mathrm{A})}_{\Sigma_1}+y\cdot\underbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{K}+\mathrm{K}+\mathrm{A})}_{\Sigma_2}+\upsilon\cdot\mathrm{A}=50\ \Theta\text{έσεις} \Leftarrow$

$$\Leftarrow x\cdot(2\mathrm{A}+\mathrm{K})+y\cdot(2\mathrm{A}+2\mathrm{K})+\upsilon\cdot\mathrm{A}=50\,\Theta \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \underbrace{(2x+2y+\upsilon)}_{=25}\mathrm{A}+\underbrace{(x+2y)}_{=25}\mathrm{K}=50\,\Theta \Leftarrow \begin{Bmatrix} 2x+2y+\upsilon=25 \\ x+2y=25 \end{Bmatrix} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{Bmatrix} 2x+2y=25-\upsilon \\ 2x+2y=x+25 \end{Bmatrix} \Leftarrow \begin{Bmatrix} 2(x+y)=25-\upsilon \\ 25-\upsilon=x+25 \end{Bmatrix} \Leftarrow \begin{Bmatrix} 2(x+y)=25-\upsilon \\ \mathbb{N}\ni x=-\upsilon\leq 0 \end{Bmatrix}$$

δηλαδή $\{x=\upsilon=0 \ \wedge\ 2y=25\}$, αδύνατον αφού $y \in \mathbb{N}$.

Επομένως υπάρχουν πάντα δύο κορίτσια που τα χωρίζει μία μόνο θέση και συνεπώς υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα πενήντα, που κάθεται μεταξύ δύο κοριτσιών.

Ασκηση 81. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα τέσσερα αντιδραστήρια A, B, Γ, Δ ενός εργαστηρίου σε ένα ράφι;

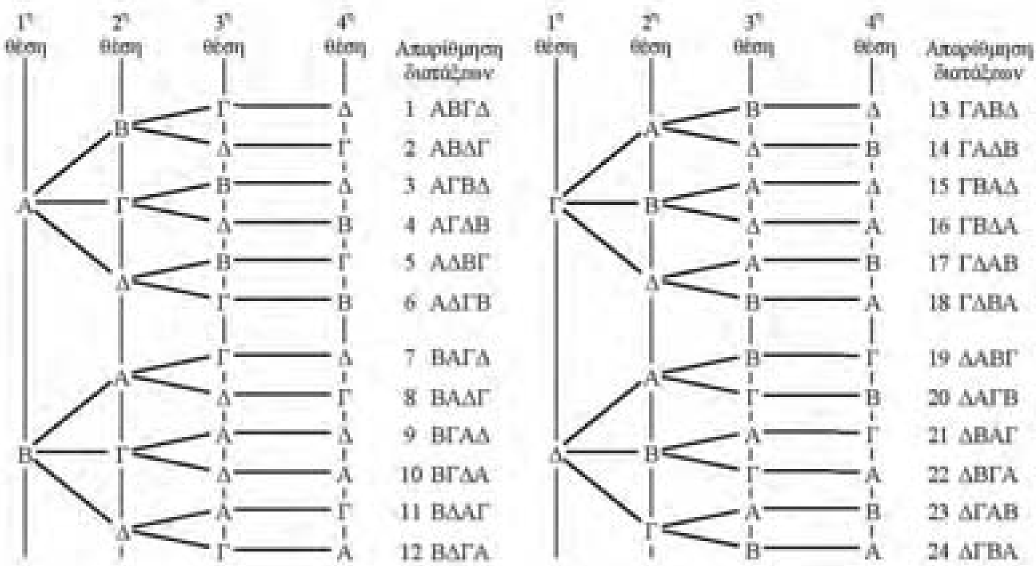
Λύση. Το σύνολο των δυνατών τρόπων είναι $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Μία διαφορετική απεικόνιση, πολύ χρήσιμη για την επίλυση προβλημάτων τέτοιου είδους, ονομάζεται δενδροδιάγραμμα (*tree diagram*) ή διάγραμμα δέντρου.

Στο διάγραμμα αυτό εμφανίζονται οι δυνατές θέσεις στη διάταξη των τεσσάρων αντιδραστηρίων, πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη, και τα τέσσερα αντιδραστήρια, A, B, Γ, Δ ανάλογα με τη θέση που κάθε φορά καταλαμβάνουν.

Επίσης εμφανίζεται η απαρίθμηση των διατάξεων.

Δενδροδιαγράμματα για τη διάταξη των τεσσάρων αντιδραστηρίων:



Ασκηση 82. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ είναι ακέραιος, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Απόδειξη. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2)-(2n+1)}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \left(2 - \frac{2n+1}{n+1}\right) =$

$= 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!} = 2\binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n}$. Επειδή οι αριθμοί $\binom{2n}{n}$ και $\binom{2n+1}{n}$

είναι ακέραιοι, έπεται ότι ο αριθμός $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ είναι ακέραιος.

Αλλιώς. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\big((n+1)-n\big) =$

Ομοίως από το ερώτημα (ii) προκύπτει ότι, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B με $\mathcal{P}(A)=1$, ισχύει $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(B)=1\cdot\mathcal{P}(B)=$ $=\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)$, οπότε και πάλι τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 8. Κατά τη ρίψη κανονικού τετραέδρου με έδρες αριθμημένες από 1 έως 4, έστω A το ενδεχόμενο εμφανίσεως της έδρας 1 ή της έδρας 2, B το ενδεχόμενο εμφανίσεως της έδρας 1 ή της έδρας 3 και Γ το ενδεχόμενο εμφανίσεως της έδρας 1 ή της έδρας 4. Τότε έχομε:

$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(\{1,2\})=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(\{1\})=\frac{1}{4}=\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)$,

$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(\{1,3\})=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(A\cap \Gamma)=\mathcal{P}(\{1\})=\frac{1}{4}=\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(\Gamma)$,

$\mathcal{P}(\Gamma)=\mathcal{P}(\{1,4\})=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(B\cap \Gamma)=\mathcal{P}(\{1\})=\frac{1}{4}=\mathcal{P}(B)\mathcal{P}(\Gamma)$,

$\mathcal{P}(A\cap B\cap \Gamma)=\mathcal{P}(\{1\})=\frac{1}{4}\neq\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)\mathcal{P}(\Gamma)$.

Άρα τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι μεν, ανά δύο ανεξάρτητα αλλά δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα. Ας δούμε τώρα τη διαφορά μεταξύ της ανά δύο και της πλήρους ανεξαρτησίας, από διαφορετική σκοπιά χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες.

Έχομε $$\mathcal{P}(A\setminus B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=\mathcal{P}(A),$$

$$\mathcal{P}(A\setminus \Gamma)=\frac{\mathcal{P}(A\cap \Gamma)}{\mathcal{P}(\Gamma)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=\mathcal{P}(A)$$

και $$\mathcal{P}(A\setminus B\Gamma)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B\cap \Gamma)}{\mathcal{P}(B\cap \Gamma)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1.$$

Δηλαδή από μόνα τους τα B και Γ, δεν προσφέρουν καμία πληροφορία σχετικώς με την εμφάνιση ή όχι του A, όταν όμως τα πάρομε μαζί, καθιστούν το A βέβαιο ενδεχόμενο.

2.2.11 Διαταράξεις n διατεταγμένων στοιχείων

Ορισμός. Διαταράξεις (*Derangement*) n διατεταγμένων στοιχείων ενός συνόλου, ονομάζομε τις διατάξεις στις οποίες **δεν εμφανίζεται κανένα αντικείμενο στην αρχική του θέση**. Την συμβολίζομε με D_n ή με το σύμβολο $!n$ (υποπαραγοντικό) ή και με $n_{¡}$.

Παραδείγματα. Π.χ. Οι διαταράξεις των στοιχείων $(1,2,3)$ είναι $\{(2,3,1),(3,1,2)\}$ επομένως $!3=2$. Οι διαταράξεις των στοιχείων $(1,2,3,4)$ είναι $\{(2,1,4,3)$, $(2,3,4,1)$, $(2,4,1,3)$, $(3,1,4,2)$, $(3,4,1,2)$, $(3,4,2,1)$, $(4,1,2,3)$, $(4,3,1,2)$, $(4,3,2,1)\}$ επομένως $!4=9$.

Ιστορικά. Το πρόβλημα της εύρεσης των παραπάνω διατάξεων ετέθη για πρώτη φορά το 1708 από τον ***Pierre Raymond de Montmort***, ο οποίος το έλυσε το 1713. Το ίδιο έτος το έλυσε και ο ***Nicholas Bernoulli***.

Υπολογισμός. Ο αριθμός των διαταράξεων n διατεταγμένων στοιχείων δίνεται από τον τύπο:

$$!n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$!n$	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	…

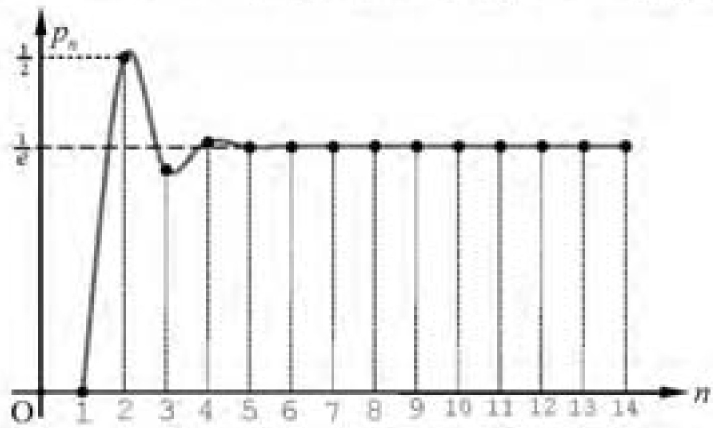
Σημείωση. *Ισχύει* $!n = n\cdot!(n-1)+(-1)^n \Rightarrow \quad !n=(n-1)\big(!(n-1)+!(n-2)\big)$.

Αξιοσημείωτο είναι ότι ισχύει και η σχέση: $n! = (n-1)\big((n-1)!+(n-2)!\big)$.

Ιδιότητες. **1)** $!n = [\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}]$ για $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, **2)** $!n = [(e+\frac{1}{e})\cdot n!]-[e\cdot n!]$ για $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$

3) $!n = n! - \sum_{k=1}^{n}\left(!(n-k)\cdot\binom{n}{k}\right)$, **4)** $!n = \begin{cases}[\frac{n!}{e}+a], \text{αν } n \text{ περιττός και } a\in[0,\frac{1}{2}]\\ [\frac{n!}{e}+b], \text{αν } n \text{ άρτιος και } b\in[0,\frac{1}{2}]\end{cases}$

Παρατηρήσεις. **i)** *Η πιθανότητα μια τυχαία διάταξη από* n *διατεταγμένα αντικείμενα να μην περιέχει κανένα αντικείμενο στην αρχική του θέση, είναι ίση με* $p_n = !n/n!$. *Ενδιαφέρον είναι ότι αν αυτό αναληφθεί πολλές φορές, το όριο* $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}(!n/n!) = 1/e \simeq$ $\simeq 0.3679 \simeq 7/19$. *Η πιθανότητα* p_n *πλησιάζει την τιμή* $1/e$ *πολύ γρήγορα.*



Εφαρμογή. *Αν μοιράσομε σε n-μαθητές, n-ασκήσεις, η πιθανότητα ώστε σε ένα δεύτερο τυχαίο μοίρασμα των ίδιων ασκήσεων να μη πάρει κανένας από τους μαθητές την ίδια άσκηση, απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	0	0.5	0.3333	0.3750	0.3667	0.3681	0.3679	0.3679	0.3679	0.3679

ii) *Αξιοσημείωτο είναι ότι ο αριθμός* $!3 = 2$ *είναι ο μοναδικός πρώτος αριθμός που εκπροσωπεί υποπαραγοντικό ενός αριθμού και ο* 148349 *είναι ο μοναδικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των υποπαραγοντικών των ψηφίων του, δηλαδή ισχύει* $148349 = !1+!4+!8+!3+!4+!9$.

$\Omega = \{123, 213, 132, 312, 231, 321\}$ με $N(\Omega) = 3! = 6$.

Θέτομε A_i = {Η επιστολή i με $i = 1, 2, 3$ τοποθετείται στον i φάκελο},

A = {Καμία επιστολή δεν τίθεται στον σωστό φάκελο},

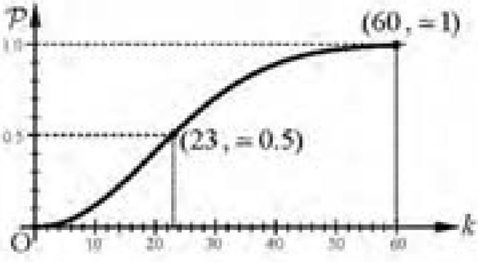
A^C = {Τουλάχιστον μία επιστολή τίθεται στον σωστό φάκελο}

και ισχύει $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A^C)$. Έχομε $P(A^C) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$
$= \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) - \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) +$
$+ \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Επιπλέον $\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_3) = \frac{2}{6}$,
$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) = \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$ και
$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$. Συνεπώς $\mathcal{P}(A^C) = 3 \cdot \frac{2}{6} - 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ και
$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} \simeq 33.3\%$.

Άσκηση 21. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ k-μαθητών ($k \le 365$), δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Η διάρκεια του χρόνου λαμβάνεται 365 ημέρες.

Λύση. Αν A είναι το ενδεχόμενο δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα, τότε A^C είναι το ενδεχόμενο οι k μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές ημέρες. Λόγω της $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A^C)$ ο υπολογισμός της $\mathcal{P}(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό της $\mathcal{P}(A^C)$. Επειδή ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μία από τις 365 ημέρες του χρόνου, έχομε $N(\Omega) = 365^k$. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A^C είναι $365(365-1)\ldots(365-k+1)$, δεδομένου ότι οι k μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές ημέρες.

Άρα $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A^C) = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k} = 1 - \dfrac{365!}{(365-k)!\,365^k}$.



k	$\mathcal{P} \simeq$	k	$\mathcal{P} \simeq$
10	0.11694818	50	0.97037358
19	0.37911853	**60**	**0.99412266**
23	**0.50729723**	70	0.99915958
30	0.70631624	80	0.99991433
40	0.89123181	110	0.99999999

Αξιοσημείωτο είναι ότι για $k = 23$ η πιθανότητα είναι $\mathcal{P}(A) = 50\%$ και για $k = 70$ είναι σχεδόν βέβαιο το ενδεχόμενο: «Δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα».

*Σχόλιο. Έχομε την γνώμη, ότι αξίζει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο κείμενο του **Raymond Smullyan**, που ενυπάρχει στο έξοχο βιβλίο του «ΤΗΝ ΚΥΡΙΑ Η ΤΗΝ ΤΙΓΡΗ», στην σελίδα 31, με τίτλο: Το μειονέκτημα να είσαι αφηρημένος.*

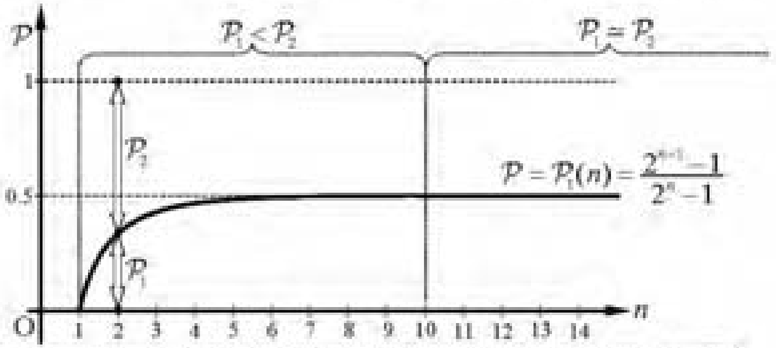
Ασκηση 74. Από ένα δοχείο που περιέχει n σφαίρες, εξάγομε τυχαίως ένα αριθμό σφαιρών. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε, ο εξαγόμενος αριθμός σφαιρών να είναι άρτιος (βοηθητικά: βλέπε κεφάλαιο 2.1, άσκ. 22).

Λύση. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n-1$,

ενώ οι ευνοϊκές περιπτώσεις $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots=2^{n-1}-1$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα $\mathcal{P}_1$, ώστε ο εξαγόμενος αριθμός σφαιρών να είναι άρτιος, θα είναι $\mathcal{P}_1=\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$.

Σχόλιο. Η πιθανότητα $\mathcal{P}_2$ να είναι ο εξαγόμενος αριθμός σφαιρών περιττός είναι $\mathcal{P}_2=1-\mathcal{P}_1$. Αξιοσημείωτο είναι ότι για $n<10$, η $\mathcal{P}_2$ είναι εμφανώς μεγαλύτερη από την $\mathcal{P}_1$.



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\mathcal{P}_1$	0.000	0.333	0.429	0.467	0.484	0.492	0.496	0.498	0.499	0.500	0.500	...
$\mathcal{P}_2$	1.000	0.667	0.571	0.533	0.516	0.508	0.504	0.502	0.501	0.500	0.500	...

Ασκηση 75. Από μία τάξη, που περιέχει 20 μαθητές και 10 μαθήτριες, θέλομε να φτιάξομε ομάδες από 7 άτομα, για τις ανάγκες μιας παραστάσεως.

i) Πόσες διαφορετικές ομάδες μπορούμε να σχηματίσομε;

ii) Πόσες ομάδες από αυτές περιέχουν 3 μαθήτριες;

iii) Πόσες περιέχουν τουλάχιστον 3 μαθήτριες;

iv) Πόσες περιέχουν το πολύ 3 μαθήτριες;

Λύση. **i)** Μπορούμε να επιλέξομε $\binom{20+10}{7}=\binom{30}{7}=2035800$ ομάδες.

ii) Επειδή από τις 10 μαθήτριες, μπορούμε να σχηματίσομε $\binom{10}{3}=120$ τριάδες μαθητριών και κάθε τριάδα μπορεί να συμπληρωθεί με μία από τις δυνατές $\binom{20}{4}=4845$ τετράδες μαθητών, έπεται ότι μπορούμε να σχηματίσομε $\binom{10}{3}\cdot\binom{20}{4}=\frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=581400$ ομάδες που να περιέχουν 3 μαθήτριες.

iii) Ομάδες που να περιέχουν τουλάχιστον 3 μαθήτριες, δηλαδή 3 ή 4

Άσκηση 91. Να βρεθεί το σύνολο των θετικών ακεραίων x, y, z που πληρούν τις σχέσεις $x \le y \le z \ \wedge \ x^y + y^z = z^x$.

Λύση. Δεδομένου ότι $3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \ldots$, συνάγεται ότι $y^z \ge z^y$, αν το $y \ge 3$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει λύση αν το $y \ge 3$.

Επειδή $1 \le x \le y$, οι μοναδικές πιθανές τιμές εις τρόπον, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση είναι οι $(1,1)$, $(1,2)$ και $(2,2)$. Οι τιμές αυτές έχουν ως συνέπεια τις εξισώσεις:

$$1^1 + 1^1 = z^1,\ 1^1 + 2^z = z^1 \text{ και } 2^2 + 2^z = z^2.$$

Η δεύτερη εξίσωση δεν έχει λύση δεδομένου ότι $2^z > z$. Η Τρίτη εξίσωση δεν έχει λύση αφού $2^z \ge z^2$ για $z \ge 4$ και η τριάδα $(2,2,3)$ δεν αποτελεί λύση της $x^y + y^z = z^x$. Η πρώτη εξίσωση οδηγεί στη μοναδική λύση $(1,1,2)$.

Άσκηση 92. Εκατό λαμπτήρες εξοπλισμένες με πλήκτρο ON-OFF η κάθε μία, είναι αριθμημένες από το 1 έως 100 και βρίσκονται κατά σειράν σε διάδρομο. Κάποιος διέρχεται 100 φορές τον διάδρομο πιέζοντας κάθε φορά τα πλήκτρα από τους λαμπτήρες που έχουν αριθμό:

1η φορά) πολλαπλάσιο του 1 (λαμπτήρες με αριθμό 1,2,3,4,…),
2η φορά) πολλαπλάσιο του 2 (λαμπτήρες με αριθμό 2,4,6,8,…),
3η φορά) πολλαπλάσιο του 3 (λαμπτήρες με αριθμό 3,6,9,12,…),
⋮ ⋮
100η φορά) πολλαπλάσιο του 100 (λαμπτήρας με αριθμό 100).

Να βρείτε ποιοί λαμπτήρες θα μείνουν αναμμένοι μετά την 100η φορά.

Λύση. Έστω $k \in \mathbb{N}_{[0,100]}$ (στην περίπτωσή μας ο k χαρακτηρίζει την θέση ενός από τους 100 λαμπτήρες) και Δ το σύνολο των διαιρετών του k.

a) Αν ο k δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού είναι προφανές ότι το σύνολο των διαιρετών του k θα είναι το:

$$\Delta = \{\underbrace{\underbrace{x_1, y_1}_{2}, \underbrace{x_2, y_2}_{2}, \ldots, \underbrace{x_{n-1}, y_{n-1}}_{2}, \underbrace{x_n, y_n}_{2}}_{2n}\} \text{ με } n \in \mathbb{N}_{\ge 1} \wedge x_n, y_n \in \mathbb{N}_{[1,k]}$$

Επιπλέον θα ισχύει ότι $k = (x_1 \cdot y_1) = (x_2 \cdot y_2) = \ldots = (x_i \cdot y_i)$ με τους αριθμούς $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, y_n$ διαφορετικούς μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή ο πληθικός αριθμός του συνόλου Δ θα είναι άρτιος δηλαδή με άλλα λόγια θα έχει μορφή $N(\Delta) = 2n$, $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$.

Π.χ. για $k = 12 = (1 \cdot 12) = (2 \cdot 6) = (3 \cdot 4)$ το σύνολο των διαιρετών του 12 είναι $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ και επομένως $N(\Delta) = 6$.

b) Αν ο k είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού r, το σύνολο των διαιρετών του k θα είναι το:

$$\Delta=\{\underbrace{\underbrace{x_1,y_1}_{2},\underbrace{x_2,y_2}_{2},\ldots,\underbrace{x_{n-1},y_{n-1}}_{2},\underbrace{x_n,y_n}_{2},r}_{2n+1}\} \text{ με } n\in\mathbb{N}_{\geq 1} \wedge r,\ell_n,m_n\in\mathbb{N}_{[1,k]}.$$

Επιπλέον θα ισχύει $k=(x_1\cdot y_1)=(x_2\cdot y_2)=\ldots=(x_n\cdot y_n)=r^2$ με τους $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_{n-1},y_{n-1},x_n,y_n,r$ διαφορετικούς μεταξύ τους.

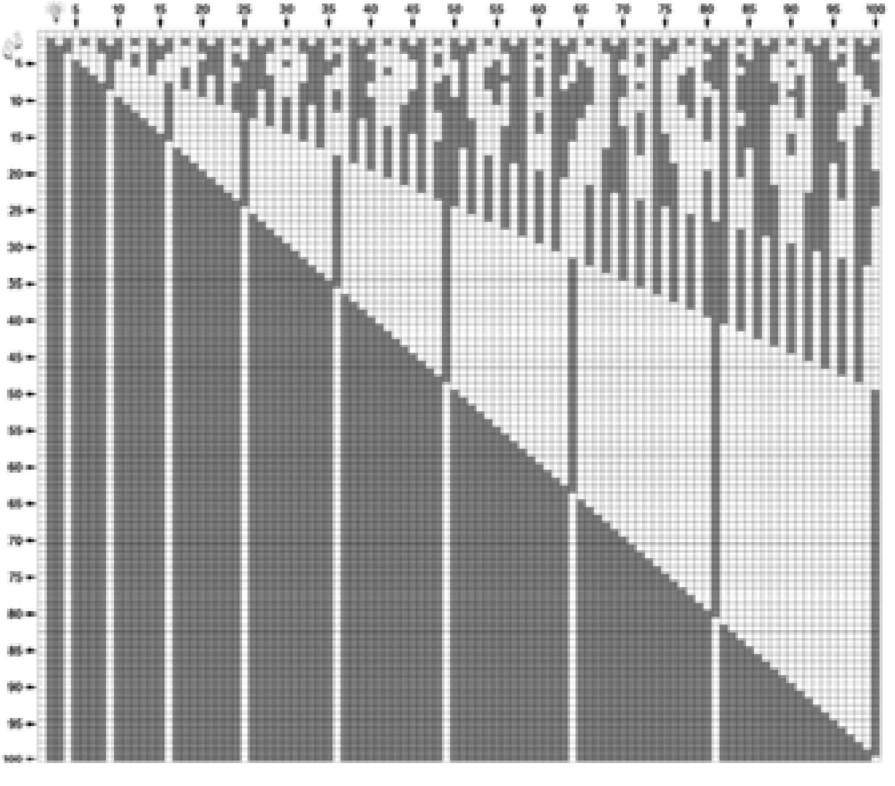
Ο πληθικός αριθμός του συνόλου Δ θα είναι περιττός αριθμός, δηλαδή με άλλα λόγια θα έχει την μορφή $N(\Delta)=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$.

Π.χ. για $k=36=(1\cdot 36)=(2\cdot 18)=(3\cdot 12)=(4\cdot 9)=6^2$ το σύνολο των διαιρετών του 36 είναι $\Delta=\{1,2,3,4,6,12,18\}$ και άρα $N(\Delta)=7$.

• Από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνομε ότι αν το σύνολο των διαιρετών του αριθμού k ενός λαμπτήρα είναι άρτιος, ο λαμπτήρας θα καταλήξει σβηστός. Αναμμένοι θα μείνουν εκείνοι που έχουν αριθμό τέλειο τετράγωνο. Επομένως το σύνολο των αναμμένων λαμπτήρων μετά την 100^{η} φορά, θα είναι:

$\{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2,10^2\}=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$.

Με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή μπορούμε ευχερώς να λάβομε μια πλήρη εικόνα όλων των μεταβολών που συμβαίνουν όταν κάποιος διέλθει στον διάδρομο 100 φορές (στην εικόνα που ακολουθεί είναι: λευκό = λαμπτήρας αναμμένος, μαύρο = λαμπτήρας σβηστός, γραμμές = διάδρομος κάθε φορά και κολόνες = θέση λαμπτήρα).



$\vee\left(x-22=11^2 \wedge y-22=2^2\right) \vee\left(x-22=22^2 \wedge y-22=1\right)$.

Τελικώς προκύπτει ότι $A=\{(23,506),(24,264),(33,66),(26,143),$
$(44,44),(264,24),(66,33),(143,26),(506,23)\}$.

Άσκηση 34. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{147}-1$ διαιρείται δια του 343.

Απόδειξη. Επειδή $343=7^3$ και $2^{147}-1=8^{49}-1=(8-1)(8^{48}+8^{47}+...+1)$, αρκεί να αποδείξομε ότι ο αριθμός $8^{48}+8^{47}+...+1$ διαιρείται δια του 7^2.

Πράγματι, $8^{48}+8^{47}+...+1=(7+1)^{48}+...+1=$

$=7^{48}+\binom{48}{1}\cdot 7^{47}+\ldots+\binom{48}{47}\cdot 7+1+7^{47}+\binom{47}{1}\cdot 7^{46}+\ldots+\binom{47}{46}\cdot 7+1+\ldots$

$\ldots+7^2+2\cdot 7+1+7+1+1=49k+7(48+47+\ldots+1)+49=$

$=49k+7\cdot 24\cdot 49+49=\text{πολ}49$ όπου $k\in\mathbb{N}$.

Άσκηση 35. Να επιλυθεί στο $\mathbb{N}_{\geq 1}\times\mathbb{N}_{\geq 1}\times\mathbb{N}_{\geq 1}$ η εξίσωση:

$$xyz+xy+xz+yz+x+y+z=2000 \qquad (E)$$

Λύση. Η (Ε) $\Leftrightarrow xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1=2001 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=2001 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+1)(xy+x+y+1)=2001 \Leftrightarrow (z+1)(y+1)(x+1)=2001 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=2001$.

Επειδή ο 2001 μπορεί να γραφεί μονοσημάντως, ως γινόμενο τριών πρώτων αριθμών, δηλαδή $2001=3\cdot 23\cdot 29$, τελικώς έχομε:

$(x,y,z)\in\{(2,22,28),(2,28,22),(22,2,28),(22,28,2),(28,2,22),(28,22,2)\}$.

Άσκηση 36. Να αποδείξετε ότι, οι παραστάσεις $2x+7y$ και $3x+5y$, γίνονται πολλαπλάσια του 11, για τα ίδια ζεύγη $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Υποθέτομε ότι το (m,n) είναι ένα από τα ζεύγη, που καθιστούν την παράσταση $2x+7y$, πολλαπλάσιο του 11.

Έχομε $2m+7n=11k \Rightarrow 18\cdot 2m+18\cdot 7n=11\cdot 18k=11\ell$ $(\ell\in\mathbb{Z})\Rightarrow$

$\Rightarrow 36m+126n=11\ell \Rightarrow 3\cdot 11m+3m+11\cdot 11n+5n=11\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow 11(3m+11n)+(3m+5n)=11\ell \Rightarrow (3m+5n)=$

$=11\ell-11(3m+11n)=11(\ell-3m-11n)\Rightarrow 3m+5n=\text{πολ}11$.

Με τρόπο ανάλογο προκύπτει και το αντίστροφο.

Άσκηση 37. Να βρείτε διψήφιο φυσικό αριθμό, ο οποίος να ισούται με το άθροισμα του κύβου του ψηφίου των δεκάδων του και του τετραγώνου των ψηφίων των μονάδων του.

Λύση. Με αντικατάσταση έχομε $24 = x + y^2 - x^2 - y = (y-x)(y+x-1)$. Παρατηρούμε ότι ο ένας παράγων είναι περιττός και ο άλλος άρτιος. Επιπλέον ο παράγων $y+x-1$ είναι μεγαλύτερος από τον $y-x$. Άρα ισχύουν:

$$\{y-x=1 \ \wedge \ y+x-1=24\} \vee \{y-x=3 \ \wedge \ y+x-1=8\}.$$

Επομένως $(x,y,z)=(12,13,57) \ \vee \ (x,y,z)=(3,6,-85)$

και τελικώς $(x,y,z)=(12,13,57)$, δεδομένου ότι $x,y,z \in \mathbb{N}_{24}$.

Άσκηση 67. Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, η εξίσωση (Ε): $xy+11=2x+7y$.

Λύση. Η (Ε) $\Leftrightarrow x(y-2)=7y-11 \Rightarrow x=\dfrac{7y-11}{y-2}=7+\dfrac{3}{y-2}\in\mathbb{Z}$.

Ο αριθμός $\dfrac{3}{y-2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y-2=\pm1 \Rightarrow y=2\pm1 \\ y-2=\pm3 \Rightarrow y=2\pm3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

x	6	4	10	8
y	-1	1	3	5

.

Άσκηση 68. Να επιλυθεί στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, η εξίσωση (Ε): $x(x+1)(x+3)=2^y$.

Λύση. Θέτομε $x=2^u$, $x+1=2^w$ και $x+3=2^t$. Η (Ε) $\Leftrightarrow 2^{u+w+t}=2^y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u+w+t=y$. Επιπλέον $\{2^w-2^u=1 \wedge 2^t-2^u=3\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2^u\left(2^{w-u}-1\right)=1 \\ 2^u\left(2^{t-u}-1\right)=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{u=0,\ w=1,\ t=2\} \Rightarrow \{x=1,\ y=3\}.$$

Άσκηση 69. Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, η εξίσωση (Ε): $2x+3y=1985-xy$.

Λύση. Η (Ε) $\Leftrightarrow (x+3)(y+2)=1\cdot11\cdot181$.

Επομένως: $\begin{pmatrix} x=-2 \\ y=1989 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=-4 \\ y=-1993 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=8 \\ y=179 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=-14 \\ y=-183 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x=178 \\ y=9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=-184 \\ y=-13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=1988 \\ y=-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x=-1994 \\ y=-3 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 70. Να υπολογίσετε τους $x,y\in\mathbb{Z}$, που ικανοποιούν την (Ε): $\dfrac{2}{x-y}=x+3$.

Λύση. Η (Ε) $\Leftrightarrow 2 \overset{x\neq y}{=} (x+3)(x-y) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+3=-2 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x+3=-1 \\ x-y=-2 \end{matrix}\right\} \vee$

$\vee \left\{\begin{matrix} x+3=1 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x+3=2 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}$. Τελικώς:

x	-5	-4	-2	-1
y	-4	-2	-4	-2

.

Άσκηση 99. Αν $\left\{\begin{matrix} a,b,c\in\mathbb{R} \\ \wedge \\ a\neq b\neq c\neq a\end{matrix}\right\}$ και πληρούν την σχέση $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$,

να αποδείξετε ότι $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

Απόδειξη. Έχομε $0=\left(\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}\right)\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}\right)=\dfrac{a}{(b-c)^2}+$

$+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}+\dfrac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$

$=\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}$.

Αλλιώς. Η $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$ συνεπάγεται $\dfrac{a}{b-c}=-\dfrac{b}{c-a}-\dfrac{c}{a-b}$,

απ' όπου $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{-ab+b^2-c^2+ac}{(c-a)(a-b)}=\dfrac{(b-c)(-a+b+c)}{(c-a)(a-b)}$

και άρα $\dfrac{a}{(b-c)^2}=\dfrac{-a+b+c}{(c-a)(a-b)}$. Κυκλικώς προκύπτει ότι:

$\dfrac{b}{(c-a)^2}=\dfrac{a-b+c}{(a-b)(b-c)}$, $\dfrac{c}{(a-b)^2}=\dfrac{a+b-c}{(b-c)(c-a)}$.

Άρα $\displaystyle\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\frac{a}{(b-c)^2}=\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\frac{-a+b+c}{(c-a)(a-b)}=\frac{0}{(a+b)(b-c)(c-a)}=0$.

Αλλιώς. Από την υπόθεση έπεται ότι:

$a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)=$

$=(a-b)\left(ac-a^2+b^2-bc\right)+c(b-c)(c-a)=$

$=(a-b)\Big(c(a-b)-(a-b)(a+b)\Big)+c(b-c)(c-a)=$

$=(a-b)^2(c-a-b)+c(b-c)(c+a)=0\Rightarrow(a-b)^2=\dfrac{c(b-c)(c+a)}{a+b-c}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(a-b)^2}=\dfrac{a+b-c}{c(b-c)(c+a)}\Rightarrow\dfrac{c}{(a-b)^2}=\dfrac{a+b-c}{(b-c)(c+a)}$

και κυκλικώς $\dfrac{a}{(b-c)^2}=\dfrac{b+c-a}{(c-a)(a+b)}$, $\dfrac{b}{(c-a)^2}=\dfrac{c+a-b}{(a-b)(b+c)}$.

Άρα $\displaystyle\sum_{\circlearrowleft a,b,c}\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b+c-a}{(c-a)(a+b)}+\frac{c+a-b}{(a-b)(b+c)}+\frac{a+b-c}{(b-c)(c+a)}=0$.

Αλλιώς. Θέτομε $P=\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}$, $Q=\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}$,

$$= (y^2+y+1)\cdot\left(y^2(y^2-y+1)-(y+1)(y^2-y+1)\right)=$$
$$= (y^2+y+1)\cdot(y^2-y+1)\cdot(y^2-y-1).$$

Άσκηση 67. Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

i) $\boldsymbol{x^8+16x^2+16}$, **ii)** $\boldsymbol{x^8+4x^2+4}$.

Λύση. **i)** $\boldsymbol{x^8+16x^2+16 = x^8+8x^2+8x^2+16 = x^2(x^6+8)+8(x^2+2)} \overset{x^2=y}{=}$

$$= y(y^3+2^3)+8(y+2) = y(y+2)(y^2-y\cdot 2+2^2)+8(y+2) =$$
$$= (y+2)(y(y^2-y\cdot 2+2^2)+8) = (y+2)(y^3-2y^2+4y+8) \overset{y=x^2}{=}$$
$$= \boldsymbol{(x^2+2)\cdot(x^6-2x^4+4x^2+8)}.$$

ii) $\boldsymbol{x^8+4x^2+4 = x^8+\left(8-2^2\right)x^2+4} =$

$$= \boldsymbol{(x^8+\underline{4x^6+4\cdot 2x^4}+8x^2+4)-(\underline{4x^6+4\cdot 2x^4}+2^2x^2)} =$$
$$= \boldsymbol{((x^4)^2+(2x^2)^2+2^2+2\cdot x^4\cdot 2x^2+2\cdot x^4\cdot 2+2\cdot 2x^2\cdot 2)} -$$
$$\boldsymbol{-((2x)^2+(2x^3)^2+2\cdot 2x\cdot 2x^3) = (x^4+2x^2+2)^2-(2x+2x^3)^2} =$$
$$= \boldsymbol{(x^4-2x^3+2x^2-2x+2)\cdot(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)}.$$

Σχόλιο. *Μία γενίκευση τροπής των παραστάσεων* (**i**), (**ii**) *σε γινόμενο παραγόντων είναι οι παραστάσεις* $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *αντιστοίχως, της επομένης ασκήσεως.*

Επιπλέον είναι εντυπωσιακό ότι η παράσταση $\mathcal{H} = x^8+\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}$ *με* $\mathrm{A}\in\mathbb{Z}_{\neq 0}$ *τρέπεται σε γινόμενο παραγόντων μόνο για* $\mathrm{A}=4$ *και* $\mathrm{A}=16$.

Άσκηση 68. Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

$$\mathcal{H}_1 = \boldsymbol{x^8}+\left(k+a^3\right)\boldsymbol{x^2}+ka,\quad \mathcal{H}_2 = \boldsymbol{x^8}+\left(6k-1-k^2\right)\boldsymbol{x^2}+4k^2,$$
$$\mathcal{H}_3 = \boldsymbol{x^4}+\left(2a-k^2\right)\boldsymbol{x^2}+a^2,\ \mathcal{H}_4 = \boldsymbol{x^8}+k\left(2a-k^2\right)\boldsymbol{x^2}+a\left(k^2-a\right).$$

Λύση. $\mathcal{H}_1 = \boldsymbol{x^8}+k\,\boldsymbol{x^2}+a^3\boldsymbol{x^2}+ka = \boldsymbol{x^2}\left(\boldsymbol{x^6}+a^3\right)+k\left(\boldsymbol{x^2}+a\right) \overset{x^2=y}{=}$

$$= y\left(y^3+a^3\right)+k\left(y+a\right) = y\left(y+a\right)\left(y^2-ay+a^2\right)+k\left(y+a\right) =$$
$$= \left(y+a\right)\left(y\left(y^2-ay+a^2\right)+k\right) = \left(y+a\right)\left(y^3-ay^2+a^2y+k\right) \overset{y=x^2}{=}$$
$$= \left(\boldsymbol{x^2}+a\right)\left(\boldsymbol{x^6}-a\,\boldsymbol{x^4}+a^2\boldsymbol{x^2}+k\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{H}_1 = \boldsymbol{x^8}+\left(k+a^3\right)\boldsymbol{x^2}+ka = \left(\boldsymbol{x^2}+a\right)\left(\boldsymbol{x^6}-a\,\boldsymbol{x^4}+a^2\boldsymbol{x^2}+k\right).$$

Εφαρμογές: $(k,a)=(8,2) \Rightarrow x^8+16x^2+16 = \left(x^2+2\right)\left(x^6-2x^4+4x^2+8\right)$

$(k,a)=(0,1) \Rightarrow x^8+x^2 = \left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)x^2$

$(k,a)=(1,1) \Rightarrow x^8+2x^2+1 = \left(x^2+1\right)\left(x^6-x^4+x^2+1\right)$

Δεδομένου ότι ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ είναι ο $\cos(2\pi-\vartheta)+i\sin(2\pi-\vartheta)$, συνάγεται ότι για $k=0,1,2,...,n-1$ οι μιγαδικοί a_k και b_{n-1-k} είναι συζυγείς, δεδομένου ότι:

$$\frac{6k\pi+2\pi}{3n}+\frac{6(n-1-k)\pi+4\pi}{3n}=2\pi.$$

Επιπλέον ισχύουν $a_k+b_{n-1-k}=2\cos\frac{6k\pi+2\pi}{3n}$ και $a_k\cdot b_{n-1-k}=1$.

Από τους τύπους του ***Vieta***, συμπεραίνομε ότι οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες του $a^{2n}+a^n+1$ είναι οι, $a^2-2a\cos\frac{6k\pi+2\pi}{3n}+1$ για $k=0,1,...,n-1$, δηλαδή τελικώς έχομε αποδείξει ότι:

$$a^{2n}+a^n+1=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(a^2-2a\cos\frac{6k\pi+2\pi}{3n}+1\right) \qquad (1)$$

Εφαρμογές

1) Για $n=2$, από (1)$\Rightarrow a^4+a^2+1=\prod_{k=0}^{k=1}\left(a^2-2a\cos\frac{6k\pi+2\pi}{3n}+1\right)=$

$=\left(a^2-2a\cos\frac{\pi}{3}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{4\pi}{3}+1\right)$.

Για $n=3$, από (1) $\Rightarrow a^6+a^3+1=\prod_{k=0}^{k=2}\left(a^2-2a\cos\frac{6k\pi+2\pi}{3n}+1\right)=$

$=\left(a^2-2a\cos\frac{2\pi}{9}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{8\pi}{9}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{14\pi}{9}+1\right)$ ή

$$a^6+a^3+1=\left(a^2-2a\cos40^\circ+1\right)\left(a^2-2a\cos160^\circ+1\right)\left(a^2-2a\cos280^\circ+1\right) \qquad (2)$$

2) Για $a=i$ στον τύπο (2) και δεδομένου ότι $i^2=i^6=-1$, έπεται:

$i^3=-8i^3\cos40^\circ\cos160^\circ\cos280^\circ=1\Rightarrow\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{8}$ (3)

3) Για $a=1$ στον τύπο (2) και επειδή $2-2\cos\vartheta=4\sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)$, προκύπτει ότι $3=64\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 80^\circ\cdot\sin^2 140^\circ$ και μετά τις αναγωγές:

$64\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 40^\circ\cdot\sin^2 80^\circ=3\Rightarrow\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ=\frac{1}{8}\sqrt{3}$ (4)

Με συνδυασμό των (3) και (4)$\Rightarrow\tan20^\circ\tan40^\circ\tan80^\circ=\tan60^\circ$.

4) Για $a=1$ ή $a=i$ στον τύπο (2), αποδεικνύονται ουσιώδεις τριγωνομετρικές σχέσεις, π.χ.: $\prod_{k=0}^{k=n-1}\sin\frac{3k\pi+\pi}{3n}=\frac{\sqrt{3}}{2^n}$.

<u>Α</u>σκηση 64. Αν $f(x,y)\equiv\sin2x\cdot\sin(x+2y)$ να τραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση $\mathscr{H}=f(x,y)-f(y,x)$.

Λύση. $f(x,y)=\sin2x\cdot\left(\sin x\cdot\cos2y+\cos x\cdot\sin2y\right)=$

$=\sin2x\cdot\cos2y\cdot\sin x+\sin2x\cdot\sin2y\cdot\cos x=$

$= 2\sin^2 x\cdot\left(1-2\sin^2 y\right)\cdot\cos x+\sin 2x\cdot\sin 2y\cdot\cos x =$

$= 2\sin^2 x\cdot\cos x+\left(\sin 2x\cdot\sin 2y-4\sin^2 x\cdot\sin^2 y\right)\cdot\cos x =$

$= 2\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\cos x+4\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)\cdot\cos x \Rightarrow$

$f\left(x,y\right)=2\cos x-2\cos^3 x+4\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)\cdot\cos x \qquad (1)$

Με ανάλογο τρόπο ή με $x \leftrightarrows y$ έχομε:

$f\left(y,x\right)=2\cos y-2\cos^3 y+4\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)\cdot\cos y \qquad (2)$

Από (1), (2) έπεται $\mathscr{H}=f\left(x,y\right)-f\left(y,x\right)=2\left(\cos x-\cos y\right)-$

$-2\left(\cos^3 x-\cos^3 y\right)+4\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)\cdot\left(\cos x-\cos y\right)=$

$=2\left(\cos x-\cos y\right)-2\left(\cos x-\cos y\right)\cdot\left(\cos^2 x+\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y\right)+$

$+2\left(\cos x-\cos y\right)\cdot 2\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)=2\left(\cos y-\cos x\right)\cdot$

$\cdot\left(-1+\left(\cos^2 x+\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y\right)-2\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\left(x+y\right)\right).$

Επειδή $\cos^2 x+\cos^2 y=1+\cos\left(x-y\right)\cdot\cos\left(x+y\right)$,

$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right)$,

$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right)$ τελικώς έχομε

$\mathscr{H}=\left(\cos y-\cos x\right)\left(2\cos^2\left(x+y\right)+\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right)$ ή

$$\mathscr{H}=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\left(1+\cos\left(2\left(x+y\right)\right)+\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right).$$

Αλλιώς. Είναι γνωστό ότι ισχύουν οι παρακάτω βασικές ταυτότητες

$\sin \mathrm{A}\cdot\sin \mathrm{B}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)-\cos\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)\right) \qquad (3)$

$\cos \mathrm{A}-\cos \mathrm{B}=-2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)\right) \qquad (4)$

$\sin 3\mathrm{A}=\sin \mathrm{A}\left(1+2\cos 2\mathrm{A}\right) \qquad (5)$

$\sin 5\mathrm{A}=\sin \mathrm{A}\left(1+2\cos 2\mathrm{A}+2\cos 4\mathrm{A}\right) \qquad (6)$

$\mathscr{H}=\sin 2x\cdot\sin\left(x+2y\right)-\sin 2y\cdot\sin\left(y+2x\right)\overset{(3)}{=}$

$\overset{(3)}{=}\frac{1}{2}\left(\cos\left(x-2y\right)-\cos\left(3x+2y\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\left(y-2x\right)-\cos\left(3y+2x\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x-2y\right)-\cos\left(y-2x\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\left(3x+2y\right)-\cos\left(3y+2x\right)\right)\overset{(4)}{=}$

$\overset{(4)}{=}\sin\left(\frac{3}{2}\left(x-y\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\left(x+y\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\left(x-y\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{5}{2}\left(x+y\right)\right).$

Εάν θέσομε $\frac{1}{2}\left(x+y\right)=a$ και $\frac{1}{2}\left(x-y\right)=b \qquad (7)$

η παράσταση γίνεται $\mathscr{H}=\sin 3b\cdot\sin a+\sin b\cdot\sin 5a\overset{(5),(6)}{=}$

Έχομε $\left\{1-|a|=\frac{b}{a} \wedge 1-|b|=\frac{a}{b}\right\} \Rightarrow 2-(|a|+|b|)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-\left(|a|+|b|\right)=\frac{a^2+b^2}{ab} \overset{|a||b|\geq ab}{\geq} \frac{a^2+b^2}{|a||b|}=2+\frac{a^2+b^2}{|a||b|}-2=2+\underbrace{\frac{\left(|a|-|b|\right)^2}{|a||b|}}_{>0} \overset{(1)}{>} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-\left(|a|+|b|\right)>2 \overset{|x|\geq x}{\Rightarrow} \left|2-\left(|a|+|b|\right)\right| \geq 2-\left(|a|+|b|\right)>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|2-\left(|a|+|b|\right)\right|>2 \Rightarrow 2-\left(|a|+|b|\right)<-2 \vee 2-\left(|a|+|b|\right)>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4<\left(|a|+|b|\right) \vee \underbrace{-\left(|a|+|b|\right)>0}_{\text{άτοπο}} \Rightarrow |a|+|b|>4 \Rightarrow \left(|a|+|b|\right)^2>16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(|a|-|b|\right)^2+4|a||b|>16 \Rightarrow \left(|a|-|b|\right)^2>16-4|ab|$ και με $|ab|<1$

τελικώς έχομε ότι $\left(|a|-|b|\right)^2>12$ δηλαδή $\big||a|-|b|\big|>2\sqrt{3}$.

Ασκηση 51. Αν οι αριθμοί $m,n,r \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, με $|m|^2+|n|^2+|r|^2 \leq 1$ να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{x}{m}\right|^2+\left|\frac{y}{n}\right|^2+\left|\frac{z}{r}\right|^2 \geq |x+y+z|,\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Επειδή $(a^2+b^2+c^2)\cdot(x^2+y^2+z^2) \overset{c.s.b.}{\geq} (ax+by+cz)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\left|\frac{x}{m}\right|^2+\left|\frac{y}{n}\right|^2+\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)\left(|m|^2+|n|^2+|r|^2\right) \geq \left(\left|\frac{x}{m}\right||m|+\left|\frac{y}{n}\right||n|+\left|\frac{z}{r}\right||r|\right)^2 \Rightarrow$

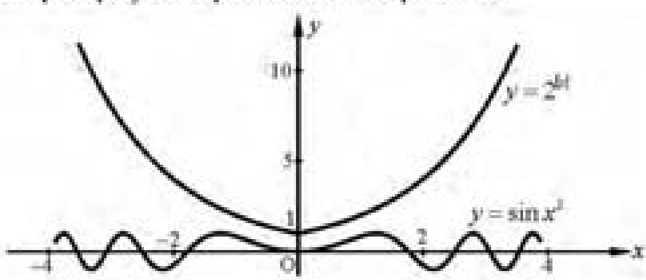
$\Rightarrow \left|\frac{x}{m}\right|^2+\left|\frac{y}{n}\right|^2+\left|\frac{z}{r}\right|^2 \geq \left(|x|+|y|+|z|\right)^2 \geq |x+y+z|^2$ και συνεπώς

$\left|\frac{x}{m}\right|^2+\left|\frac{y}{n}\right|^2+\left|\frac{z}{r}\right|^2 \geq |x+y+z|^2$.

Ασκηση 52. Να επιλυθούν στο $\mathbb{R}$, οι εξισώσεις **i)** $2^{|x|}=\sin x^2$ **ii)** $3^{|\sin\sqrt{x}|}=|\cos x|$.

Λύση. **i)** Έχομε $|x| \geq 0 \Leftrightarrow 2^{|x|} \geq 2^0 \Leftrightarrow 2^{|x|} \geq 1$. Επιπλέον $\sin x^2 \leq 1$.

Επομένως $\{\, 2^{|x|}=1 \wedge \sin x^2=1 \,\} \Leftrightarrow \{\, x=0 \wedge x^2=2k\pi+\frac{\pi}{2} \,\}$ και τελικώς η δεδομένη εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.



Επειδή $10^3 < 2^{10} < 10^4 \Rightarrow 10 < 2^{\frac{10}{3}} \Rightarrow 10^n < 2^{\frac{10n}{3}}$ (2)

Αρκεί $2^{\frac{10n}{3}} \le 2^{4n-2} \Leftarrow \dfrac{10n}{3} \le 4n-2 \Leftarrow 10n \le 12n-6 \Leftarrow n \ge 3$.

Για $n=3$ έχομε $5^3 < 2^7$, που ισχύει.

Υ	$5^k < 2^{3k-2}, \quad k \in \mathbb{N}_{\ge 3}$
Σ	$5^{k+1} < 2^{3k+1}$

Από την (Υ) με πολλαπλασιασμό των μελών της, επί 5 έπεται ότι $5^{k+1} < 2^{3k-2}\cdot 5 = 2^{3k-2}\cdot 2^3 < 2^{3k+1}$ δεδομένου ότι $5 < 2^3$.
Επομένως $5^{k+1} < 2^{3k+1}$, δηλαδή αληθεύει η (Σ) και συνεπώς η δεδομένη σχέση $5^n < 2^{3n-2}$, αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$.

Άσκηση 56. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_{>16} \cup \{1\}$, ισχύει $2^n > n^4$.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι για $n=1$ και $n=17$, η προς απόδειξη σχέση αληθεύει, αφού $2^1 > 1^4$ και $2^{17} = 131172 > 83521 = 17^4$ αντιστοίχως.

Υ	$2^k > k^4$
Σ	$2^{k+1} > (k+1)^4$

για κάθε $k > 16$. Από την υπόθεση έχομε:

$$2^k > k^4 \Rightarrow 2\cdot 2^k > 2\cdot k^4 \Rightarrow 2^{k+1} \overset{(\Upsilon)}{>} 2\cdot k^4 > (k+1)^4 \Rightarrow 2\cdot k^4 > (k+1)^4 \quad \text{(A)}$$

Ο προτασιακός τύπος (Α) ισχύει για $k > 6$ δεδομένου ότι:

$$1 < 6 < k \Rightarrow 1 < k \overset{+4k}{\Rightarrow} 1+4k < 5k \overset{k>6}{<} k\cdot k = k^2 \Rightarrow 1+4k < k^2 \overset{+6k^2}{\Rightarrow}$$

$$\overset{+6k^2}{\Rightarrow} 1+4k+6k^2 < 7k^2 \overset{k\ge 7}{\le} k\cdot k^2 = k^3 \Rightarrow 1+4k+6k^2 < k^3 \overset{+4k^3}{\Rightarrow}$$

$$\overset{+4k^3}{\Rightarrow} 1+4k+6k^2+4k^3 < 5k^3 \overset{k>6}{<} k\cdot k^3 = k^4 \Rightarrow 1+4k+6k^2+4k^3 < k^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+4k+6k^2+4k^3+k^4 < 2k^4 \Rightarrow (k+1)^4 < 2k^4 \text{ με } k > 6.$$

Μία διαφορετική απόδειξη του (Α) για $k > 6$ είναι η εξής:

$$\begin{pmatrix} 4k^3 & = & 4k^3 \\ 6k^2 & \overset{6<k}{<} & k^3 \\ 4k+1 & \overset{1<k}{<} & 5k \overset{5<k}{<} k^2 < k^3 \end{pmatrix} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{array}{l} 4k^3+6k^2+4k+1 < 6k^3 \overset{6<k}{<} k^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow k^4+4k^3+6k^2+4k+1 < 2k^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow (k+1)^4 < 2k^4. \end{array}$$

Αλλιώς. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Επειδή για $x > e$ η παράγωγος $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_{>e}$, συνεπώς και στο $\mathbb{R}_{\ge 16}$ $(\subset \mathbb{R}_{>e})$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \qquad (1)$$

έπεται ότι $\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-b)(1-c)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-c)(1-a)}} \ge$

$$\ge 2\left(\frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right) \overset{(1)}{\ge} 2 \cdot \frac{3^2}{1+c+1+a+1+b} \overset{a+b+c=1}{=} 2 \cdot \frac{9}{3+1} = \frac{9}{2}.$$

Άσκηση 39. Αν $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$, να αποδείξετε ότι $a^3+b^3+a+b \ge 4ab$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξομε ότι $a^3+b^3+a+b-4ab \ge 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow a^3-2a^2+a+b^3-2b^2+b+2a^2-4ab+2b^2 \ge 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow a(a-1)^2+b(b-1)^2+2(a-b)^2 \ge 0$, που ισχύει.

Αλλιώς. Ισχύει $a^3+b^3+a+b \ge 4ab \Leftarrow a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)+b^2\left(b+\frac{1}{b}\right) \ge 4ab \Leftarrow$

$\Leftarrow 2a^2+2b^2 \ge 4ab \Leftarrow 2\left(a^2-2ba+b^2\right) \ge 0 \Leftarrow 2(a-b)^2 \ge 0$,

που ισχύει. (Είναι γνωστό ότι $a+\frac{1}{a} \ge 2$ και $b+\frac{1}{b} \ge 2$, $\forall a,b \in \mathbb{R}_{>0}$).

Αλλιώς. Η $\frac{1}{4}\left(a^3+b^3+a+b\right) \ge \sqrt[4]{a^3 \cdot b^3 \cdot a \cdot b} \Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^3+b^3+a+b\right) \ge \sqrt[4]{a^4 \cdot b^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^3+b^3+a+b\right) \ge ab \Rightarrow a^3+b^3+a+b \ge 4ab$.

Αλλιώς. Η $a^3+b^3+a+b \ge 4ab \Rightarrow a\left(a^2+1\right)+b\left(b^2+1\right) \ge 4ab$ και επιπλέον

$\left.\begin{cases} \frac{1}{2}\left(a^2+1\right) \ge \sqrt{a^2 \cdot 1} = a \Rightarrow a^2+1 \ge 2a \\ \frac{1}{2}\left(b^2+1\right) \ge \sqrt{b^2 \cdot 1} = b \Rightarrow b^2+1 \ge 2b \end{cases}\right\}$, οπότε αρκεί να αποδείξομε

ότι $a \cdot 2a + b \cdot 2b \ge 4ab \Leftarrow a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0$ που αληθεύει.

Άσκηση 40. Αν $a,b,c \in \mathbb{R}_{>0}$, να αποδείξετε ότι $432 \cdot ab^2c^3 \le (a+b+c)^6$.

Απόδειξη. Διαδοχικώς έχομε $\sqrt[6]{a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{3}c} \overset{Cauchy}{\le} \frac{1}{6}\left(a+2\cdot\frac{1}{2}b+3\cdot\frac{1}{3}c\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^6 \cdot 3^6 \cdot \frac{ab^2c^3}{2^2 \cdot 3^3} \le (a+b+c)^6 \Rightarrow 432 \cdot ab^2c^3 \le (a+b+c)^6.$$

Άσκηση 41. Αν $a,b,c \in \mathbb{R}_{>0}$ και $abc = 8$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2+a+b} + \frac{1}{2+b+c} + \frac{1}{2+c+a} \le \frac{1}{2}.$$

Ασκηση 115. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

i) $\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 \cdot \left(\frac{239+i}{239-i}\right)^{-1} = i$, **ii)** $\frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{3+i}{3-i} = i$,

iii) $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 \cdot \left(\frac{7+i}{7-i}\right)^{-1} = i$, **iv)** $\left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2 \cdot \frac{7+i}{7-i} = i$,

v) $i^i = e^{-\pi/2} \in \mathbb{R}$, **vi)** $(i^i)^i = -i \in \mathbb{I}$,

vii) $i^{(i^i)} = \cos(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2}) \in \mathbb{C}$, **viii)** $\sqrt[i]{-1} \approx 20+\pi$.

Απόδειξη. **i)** $\frac{5+i}{5-i} = \frac{5+i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{24+10i}{25+1} = \frac{12+5i}{13} \Rightarrow \left(\frac{5+i}{5-i}\right)^2 = \frac{(12+5i)^2}{13^2} =$

$$= \frac{119+120i}{169} \Rightarrow \left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \left(\frac{119+120i}{169}\right)^2 = \frac{119^2-120^2-2\cdot 119\cdot 120i}{169^2} =$$

$$= \frac{-239+28560i}{169^2} \cdot \underbrace{(-i)\cdot i}_{=1} \Rightarrow \left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \frac{28560+239i}{169^2} \cdot i \qquad (1)$$

$$\frac{239+i}{239-i} = \frac{(239+i)^2}{|239+i|^2} = \frac{239^2-1+2\cdot 239i}{239^2+1} = \frac{2\cdot 28560+2\cdot 239i}{2\cdot 28561} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{239+i}{239-i} = \frac{28560+239i}{169^2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνάγεται ότι $\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 \cdot \left(\frac{239+i}{239-i}\right)^{-1} = i$.

ii) $\frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{3+i}{3-i} = \frac{(2+i)^2}{|2+i|^2} \cdot \frac{|3-i|^2}{(3-i)^2} = \frac{3+4i}{5} \cdot \frac{10}{8-6i} = i\,\frac{4-3i}{5} \cdot \frac{5}{4-3i} = i$.

iii) $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 \cdot \left(\frac{7+i}{7-i}\right)^{-1} = \left(\frac{(2+i)^2}{|2+i|^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(7+i)^2}{|7+i|^2}\right)^{-1} =$

$$= \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2 \cdot \frac{50}{48+14i} = \frac{9-16+24i}{25} \cdot \frac{25}{24+7i} = \underbrace{i\cdot(-i)}_{=1}\frac{-7+24i}{25} \cdot \frac{25}{24+7i} = i.$$

iv) $\left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2 \cdot \frac{7+i}{7-i} = \left(\frac{(3+i)^2}{|3+i|^2}\right)^2 \cdot \frac{|7-i|^2}{(7-i)^2} = \left(\frac{4+3i}{5}\right)^2 \cdot \frac{25}{24-7i} =$

$$= \frac{7-24i}{25} \cdot \frac{25}{24-7i} = \underbrace{i(-i)}_{=1}\frac{7-24i}{25} \cdot \frac{25}{24-7i} = i\,\frac{24-7i}{25} \cdot \frac{25}{24-7i} = i.$$

v) Επειδή $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \Rightarrow i = e^{i\pi/2} \Rightarrow i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$.

vi) $(i^i)^i \overset{(v)}{=} (e^{-\pi/2})^i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$ ή $(i^i)^i = i^{(i^2)} = i^{-1} = -i$.

vii) Από την (v) $\Rightarrow i^i = e^{-\pi/2} \Rightarrow i\ln i = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \ln i = i\frac{\pi}{2}$ $\qquad (\Sigma)$

και άρα $i^{(i^i)} \overset{(v)}{=} i^{e^{-\pi/2}} = e^{e^{-\pi/2}\ln i} \overset{(\Sigma)}{=} e^{e^{-\pi/2}\cdot i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2})$.

viii) $\sqrt[i]{-1} = (-1)^{1/i} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{1/i} = (e^{i\pi})^{1/i} = e^{\pi}$ $(\approx 20+\pi \approx 23.14)$.